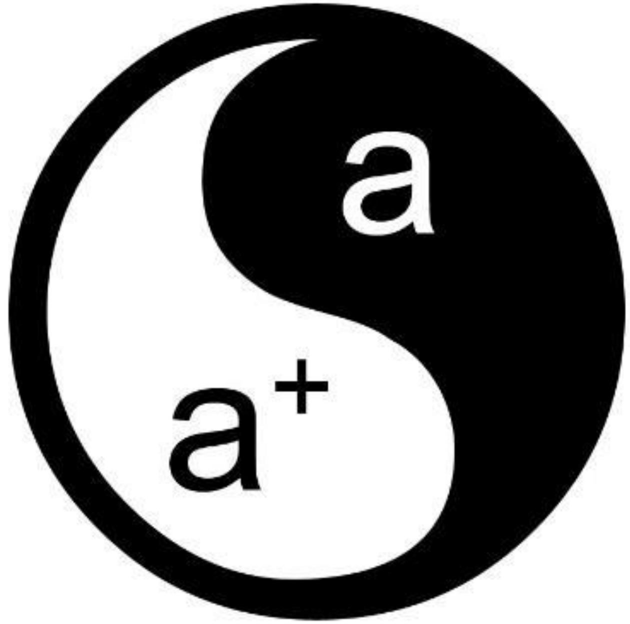


产生湮灭算符

Jake
量子力学补习班(2)
集智俱乐部

本次内容

- 希尔伯特空间中的向量与算符
- 谐振子的另类解法
  - 传统方法复习
  - 产生湮灭算符
- 多粒子系统
  - Fock空间
  - 产生湮灭算符
  - 基于产生湮灭的量子力学
- 相干态表象
  - 相干态表象下的谐振子
  - 准概率分布
- 产生湮灭算符在经典反应扩散问题中的应用

希尔伯特空间

- 希尔伯特空间H
- H中的向量|a>,|b>,…
- H中的算符A,B,…
- 转置共轭运算+：

$$A=\begin{pmatrix}1+i & i\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ A^{+}=\begin{pmatrix}1-i & -1\\ -i & 0\end{pmatrix}$$

$$|x\rangle=\begin{pmatrix}1+i & 2-i & 1\end{pmatrix},\ |x\rangle^{+}=\begin{pmatrix}1-i\\ 2+i\\ 1\end{pmatrix}$$

- 两个向量的内积：

$$\langle x|x\rangle=\left(|x\rangle^{+}\right)|x\rangle=\begin{pmatrix}(1-i)^{*}\\ (2+i)^{*}\\ 1^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i & 2+i & 1\end{pmatrix}=2+5+1=8$$

算符的特征值与特征向量

- 算符A的特征值与特征向量可以通过求解下列方程得到

$$A|x\rangle = \lambda|x\rangle \Rightarrow (A-\lambda I)|x\rangle = 0$$

- 求得的特征值和特征向量

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n,\text{对应的特征向量}: |\lambda_1\rangle, |\lambda_2\rangle, \cdots, |\lambda_n\rangle$$

- 练习：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1/2\,(5+\sqrt{33}), \lambda_2 1/2\,(5 - \sqrt{33})$$

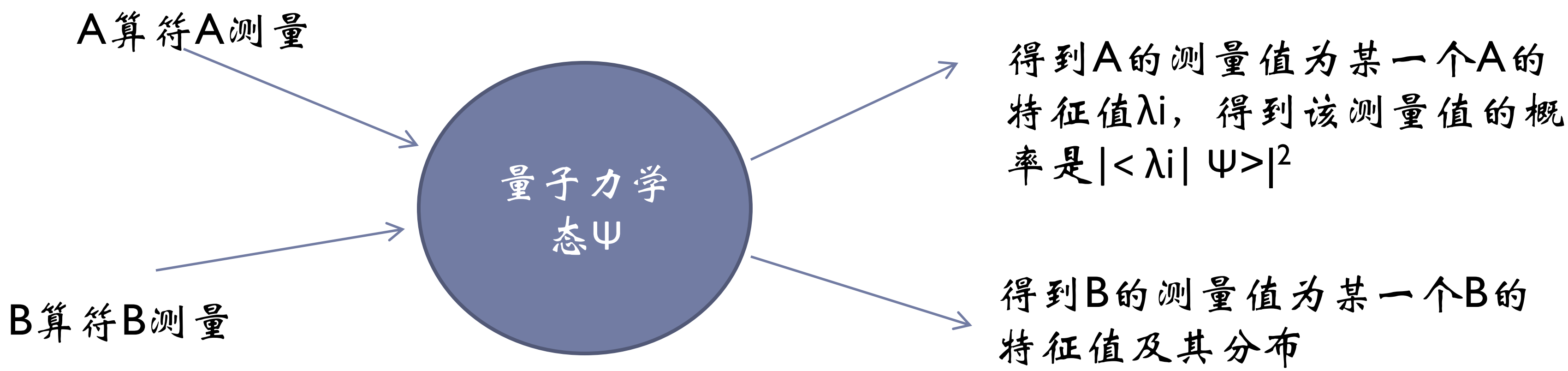
$$|\lambda_1\rangle = (\text{-}4/3 + 1/6\,(5+\sqrt{33}), 1), |\lambda_2\rangle = (\text{-}4/3 + 1/6\,(5-\sqrt{33}), 1)$$

- 厄米算符：A^{+}=A，性质：厄米算符的任意两个特征向量彼此正交

$$\langle\lambda_i|\lambda_j\rangle = \delta_{ij}$$

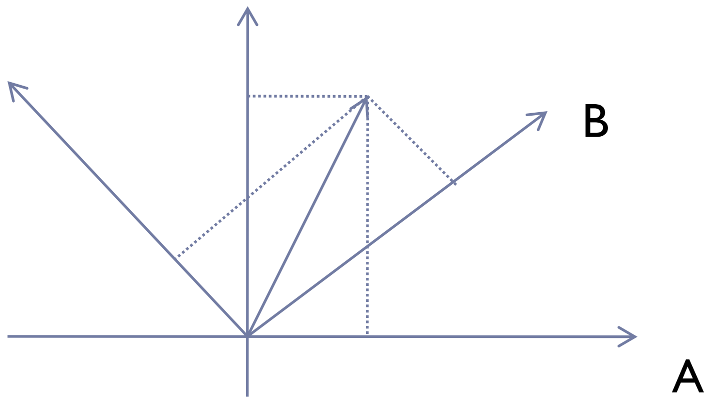
$$\text{例如}: A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

量子力学基本原理



- 所以量子力学中的算符携带了两重信息：1、可能的测量值；2、与状态Ψ结合生成概率分布。
- 任何物理量都对应厄米算符。
- 在状态Ψ下测量的物理量A的平均值是：$\langle \Psi | A | \Psi \rangle$

不同物理量的测量有可能构成不对易测量



- 两个算符的对易[A,B]=AB-BA
- 两个测量可能形成不对易测量对，即[A,B]<>0
- 如果两个算符不对易，则它们的特征向量就会构成两组坐标系

$$|\psi\rangle = \langle a_1|\psi\rangle|a_1\rangle + \langle a_2|\psi\rangle|a_2\rangle = \langle b_1|\psi\rangle|b_1\rangle + \langle b_2|\psi\rangle|b_2\rangle$$

$$\begin{pmatrix}\langle b_1|\psi\rangle \\ \langle b_2|\psi\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle b_1|a_1\rangle & \langle b_2|a_1\rangle \\ \langle b_1|a_2\rangle & \langle b_2|a_2\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle a_1|\psi\rangle \\ \langle a_2|\psi\rangle\end{pmatrix}$$

- 不确定关系的奥秘就在于此

$$\Delta A \cdot \Delta B \le \frac{\langle x|[A,B]|x\rangle}{2}$$

位置与动量

- 首先任何一个关于位置的实数函数可以看作一个X“坐标基”下的一个向量

$$f(x) \Rightarrow \cdots f(0)|0\rangle + \cdots + f(0.1)|0.1\rangle + \cdots f(0.2)|0.2\rangle + \cdots = \int f(x)|x\rangle$$

- 一个态Ψ既可以写成X坐标下的向量（位置波函数），又可以写成P“坐标基”下的波函数

$$|\psi\rangle = \int \psi(x)|x\rangle = \int \phi(p)|p\rangle, \quad \psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \phi(p) = \langle p|\psi\rangle$$

- 两个坐标系下的波函数可以相互转换

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ f(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \cdots & e^{ixp/h} & \cdots \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{\aleph_1 \times \aleph_1} \begin{pmatrix} \vdots \\ \phi(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$T_{x,p} = \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{ixp/h}$$

按照矩阵乘法展开就是：

$$f(x) = \sum_p T_{x,p}\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(p) e^{ixp/h} dp$$

傅立叶变换就是一种坐标变换！

算符在不同坐标系（表象）下的变换

- 设有算符A，它作用在向量|x>上得到向量|y>，在|u>坐标系下A可以写成矩阵形式，其中该矩阵的第i行j列为A_{ij}

$$|y\rangle = A|x\rangle$$

$$\langle u_i|y\rangle = \langle u_i|A|x\rangle = \langle u_i|A\left(\sum_j |u_j\rangle\langle u_j|\right)|x\rangle = \sum_j \langle u_i|A|u_j\rangle\langle u_j|x\rangle$$

$$y_i = \sum_j A_{ij}u_j, \quad A_{ij} = \langle u_i|A|u_j\rangle$$

- 算符A在|u>坐标系下是矩阵A_{ij}，在|v>坐标系下是矩阵A_{mn}，已知|u>,|v>两个坐标系的转换矩阵是T，则A_{ij}和A_{mn}这两个矩阵之间的关系：

$$A_{ij} = \sum_{m,n} T^{-1}_{i,n} A_{m,n} T_{m,j}$$

- 在动量坐标系（表象）下，动量算符，$P_{p,p'} = \langle p|P|p'\rangle = p'\delta(p-p')$
- 则它在位置坐标系（表象）下的矩阵形式为

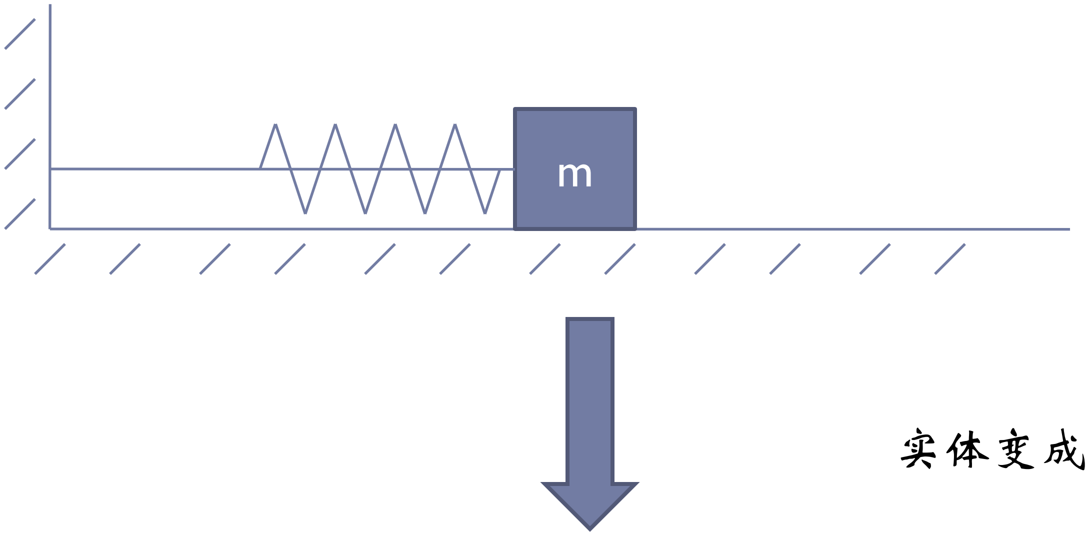
$$P_{x,x'} = \frac{1}{2\pi h}\sum_{p,p'} e^{ixp/h} p'\delta(p-p')e^{-ix'p'/h} = \frac{1}{2\pi h}\int\int e^{ixp/h} p'\delta(p-p')e^{-ix'p'/h}dp'dp$$

$$= \frac{1}{2\pi h}\int p' e^{-i(x'-x)p'/h}dp' = \frac{h}{2\pi hi}\int \frac{\partial}{\partial x} e^{-i(x'-x)p'/h}dp' = -ih\frac{\partial}{\partial x}\delta(x'-x)$$

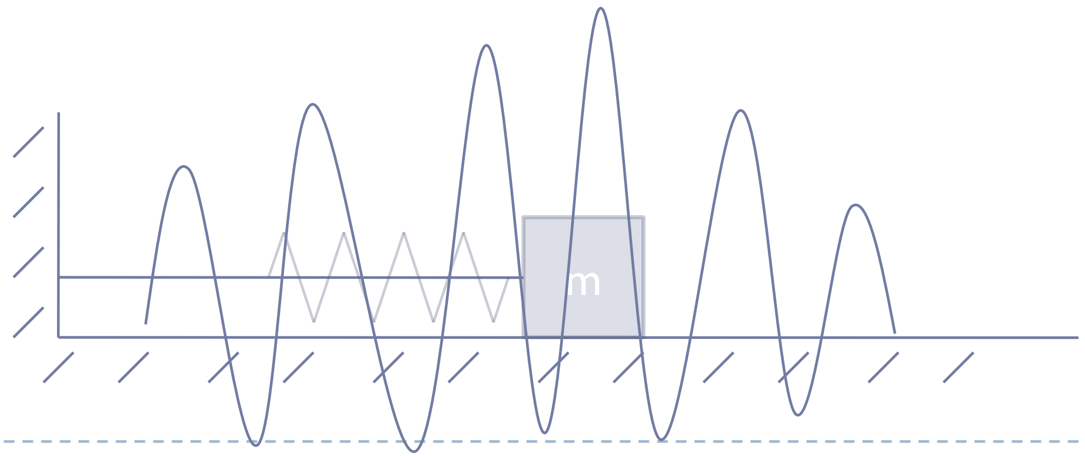
作用到某一个函数上即体现为求导，因此动量算符在位置表象下即为求导算符

谐振子的产生湮灭算符解法

量子版本的谐振子



实体变成了概率浮云



薛定谔方程

$$H=\frac{1}{2m}P^2+\frac{k}{2}X^2$$

在X的表象下：

$$H=-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{k}{2}x^2$$

薛定谔方程：

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=H\psi(x,t)$$

$$\Rightarrow ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=(-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{k}{2}x^2)\psi(x,t)$$

二阶偏微分方程

薛定谔方程求解

求解二阶偏微分方程

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=(-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{k}{2}x^2)\psi(x,t)$$

假设：$\psi(x,t)=f(x)g(t)$

$$ihf(x)\frac{dg(t)}{dt}=g(t)\left(-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\frac{k}{2}x^2 f(x)\right)$$

$$\Rightarrow ih\frac{dg(t)}{g(t)dt}=-\frac{1}{2mf(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\frac{k}{2}x^2$$

观察发现，左边仅仅与时间有关，右边仅仅与空间有关，左=右意味着：
它们都等于某个常数E

$$ih\frac{dg(t)}{g(t)dt}=E\Rightarrow g(t)=Ce^{-i\frac{E}{h}}$$

问题归结为H的本征值问题

$$-\frac{1}{2mf(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\frac{k}{2}x^2=E\Rightarrow Hf(x)=Ef(x)$$

谐振子薛定谔方程的解

- 要使得上述方程成立，首先E必须取分立的值，即哈密顿算符的本征值（n为任意>=0的整数）：

$$E_n = (n+\frac{1}{2})h\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 其次，对于任意一个本征值，H的本征向量（波函数）为：

$$|E_n\rangle = f_n(x) = \left(\frac{\sqrt{m\omega/h}}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{2h}x^2\right)L_n(\sqrt{m\omega/h}x)$$

- 其中 $L_n(\sqrt{m\omega/h}x)$ 是一个很复杂的函数，被称为厄米多项式。
- 最终薛定谔方程的解为：

$$\psi_n(x,t) = g(t)f_n(x) = \left(\frac{\sqrt{m\omega/h}}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{2h}x^2\right)L_n(\sqrt{m\omega/h}x)\exp(-itE_n/h)$$

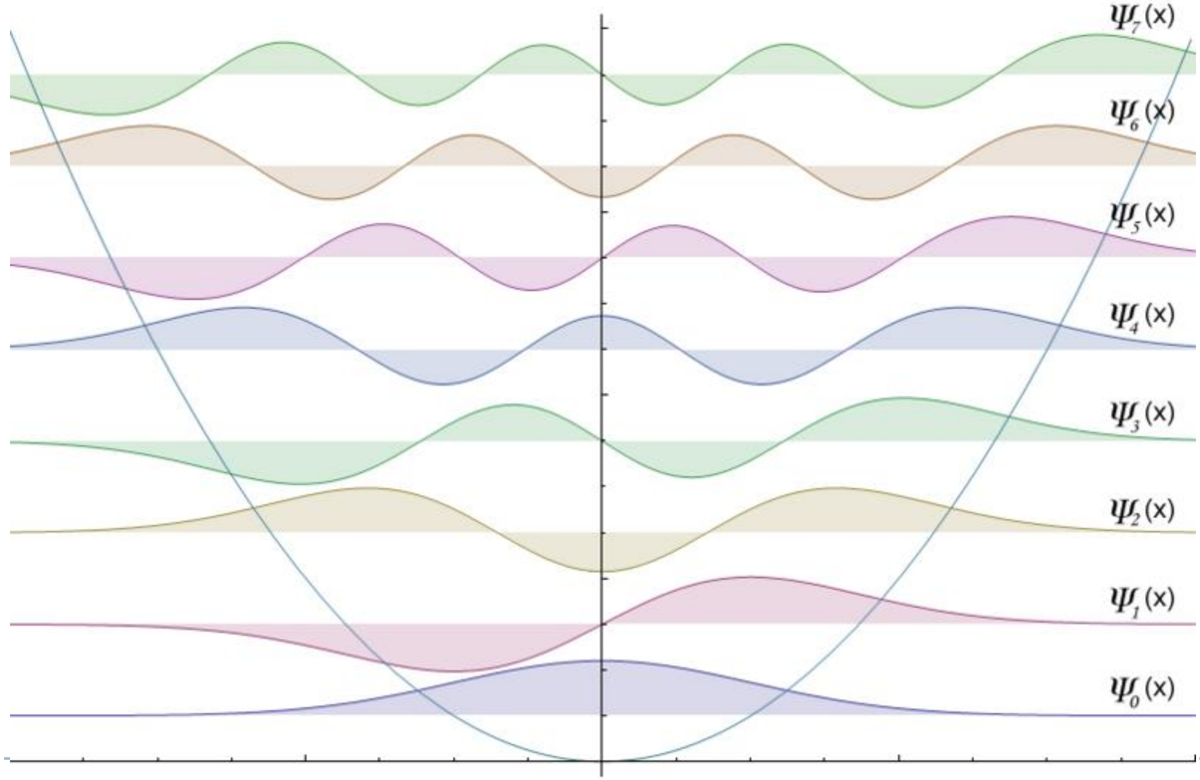
- 其中，n由初始条件确定

几率解释

- 在任意时刻，振子的位置为x的概率为：

$$p_n(x,t)=\left|\langle x|\psi_n\rangle\right|^2=|\psi_n(x,t)|^2=\left(f_n(x)\right)^2$$

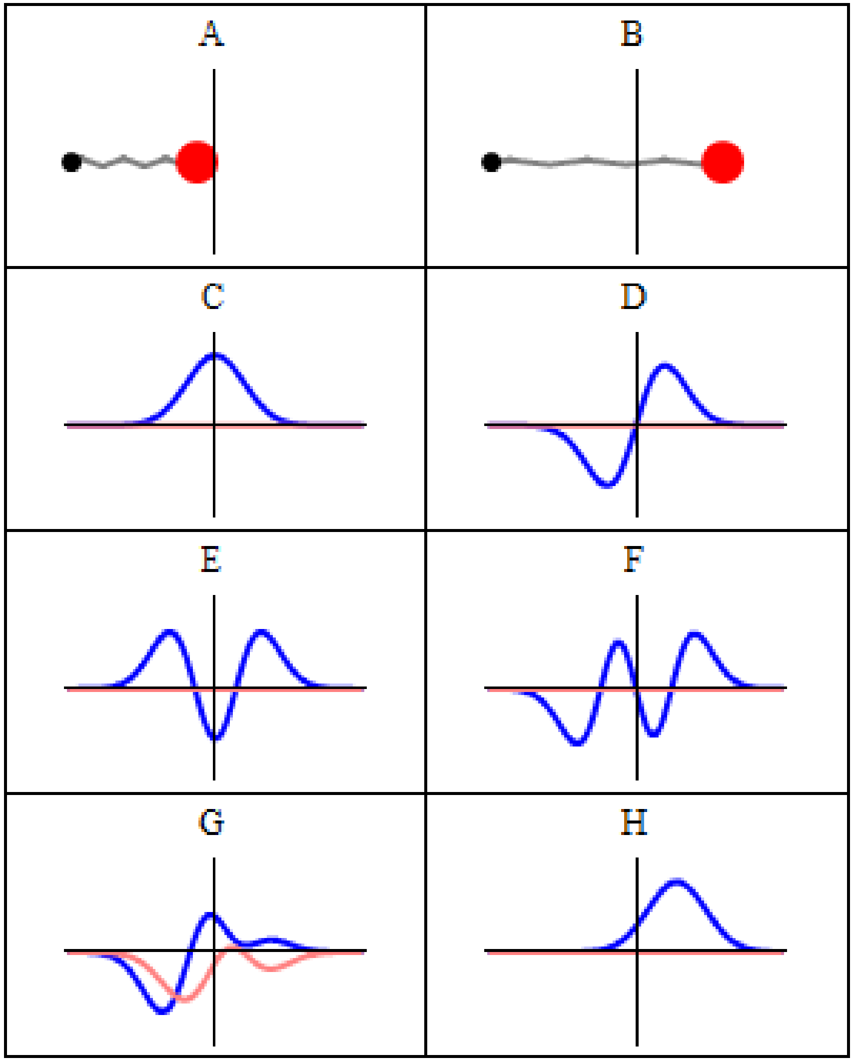
- 所以概率分布是稳定的。



总体图景

经典

经典



量子

量子

产生湮灭算符

- 在弹簧谐振子系统中，

$$H=\frac{k}{2}X^2+\frac{1}{2m}P^2$$

$$=\frac{k}{2}X^2-\frac{1}{2m}(iP)^2=h\omega\frac{1}{\sqrt{2mh\omega}}(m\omega X+iP)\frac{1}{\sqrt{2mh\omega}}(m\omega X-iP)-\frac{h\omega}{2mh\omega}m\omega h$$

$$=h\omega(a\cdot a^{+}+\frac{1}{2})$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{2mh\omega}}(m\omega X+iP),\quad a^{+}=\frac{1}{\sqrt{2mh\omega}}(m\omega X-iP),\quad \omega=\sqrt{\frac{kh}{m}}$$

其中，a是湮灭算符，a⁺是产生算符，这样系统的H就是：$h\omega(a\cdot a^{+}+\frac{1}{2})$

$$[a,a^{+}]=1,[H,a]=-h\omega a,[H,a^{+}]=hwa^{+}$$

注意：$[X,P]=ih$

用产生湮灭算符求出系统H的本征值和本征向量

- 求H的本征值和本征向量问题就变成了求$a^{+}.a$的本征值与本征向量问题。
- 下面我们根据$[a^{+},a]=1$来找到a及其a^{+}的意义
- 设$a^{+}.a$的本征值为v，本征向量为|v>则：

$$a^{+}\cdot a|v\rangle = v|v\rangle$$

$$\langle v|a^{+}\cdot a|v\rangle = \left|a|v\rangle\right|^{2} = v \Rightarrow \left|a|v\rangle\right| = \sqrt{v}, \text{并且} v \geq 0$$

我们用a乘以（1）式：

$$a\cdot a^{+}\cdot a|v\rangle = av|v\rangle$$

$$\Rightarrow (1+a^{+}a)a|v\rangle = (a|v\rangle) + aa^{+}(a|v\rangle) = v(a|v\rangle)$$

$$\Rightarrow aa^{+}(a|v\rangle) = (v-1)(a|v\rangle)$$

从此式我们看出来：(1),a|v>为aa^{+}的特征向量，对应的特征值为(v-1)

（2） $a|v\rangle = |v-1\rangle$

- 上式对于一切v推理都成立。也就是说对于任意的v-1,v-2,...,都是a^+a的本征值，但是因为v>=0，所以v只能取0,1,2,....，并且

$$a|v\rangle=\sqrt{v}|v\text{-}1\rangle$$
$$a^2=aa|v\rangle=a\sqrt{v}|v\text{-}1\rangle=\sqrt{v(v-1)}|v\text{-}1\rangle$$
$$\vdots$$
$$a^n|n\rangle=\sqrt{n!}|0\rangle$$

- 同样的推理可以用到a^+算符上，因此

$$a^+|0\rangle=|1\rangle$$
$$\left(a^+\right)^2|0\rangle=a^+|1\rangle=\sqrt{2}|2\rangle$$
$$\vdots$$
$$\left(a^+\right)^n|0\rangle=\sqrt{n!}|n\rangle$$
$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^+\right)^n|0\rangle$$

- 对应H的本征值为hω(n+1/2)

产生-湮灭算符的矩阵形式

- 在H的本征空间表象下，任意特征向量就是单位向量：

$$|v\rangle = (0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0)^T$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

- 所以X和P分别是：

$$X = \sqrt{\frac{h}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, P = \sqrt{\frac{m\omega h}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

- 将任意能量特征向量|v>可以写成X表象下的波函数

$$\langle x|v\rangle = v_n(x) = \left(\frac{\sqrt{m\omega/h}}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{2h}x^2\right) L_n(\sqrt{m\omega/h}\,x)$$

多粒子系统

希尔伯特空间的直积

- 在经典力学中，如果一个小球有S={红、绿}两种颜色，那么两个相同的小球，总共有多少种状态？s^2

$$S \otimes S = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in S, v_2 \in S\} = \{(r,r),(r,g),(g,r),(g,g)\}$$

- 在量子力学中，如果一个小球有S={红、绿}两种基本状态，那么一共有多少个量子态？ξ^2（ξ为所有复数的个数）

$$H = \{\psi = x|r\rangle + y|g\rangle \mid x^* x + y^* y = 1\}$$

- 两个小球呢？

$$H \otimes H = \{\psi = u|rr\rangle + v|rg\rangle + x|gr\rangle + y|gg\rangle \mid u^* u + v^* v + x^* x + y^* y = 1\}$$

- 共有量子态：希尔伯特的空间维数变成了s^n

$$\xi^{s^n}$$

全同粒子的量子态

- 全部粒子可以分为玻色子和费米子两种，它们的全同粒子量子态表述完全不同。
- 为了节约时间，我们只讨论玻色子
- 对于n个玻色子，假设每单个粒子的属性集合是B={b_1,b_2,...,b_s}，那么n个粒子的量子态就是

$$\psi=\sum_i c_i\left|b_\alpha b_\beta\cdots\right\rangle$$

- 但是这n个粒子全同，无法分辨，所以

$$\left|b_\alpha b_\beta\cdots\right\rangle=\left|b_\beta b_\alpha\cdots\right\rangle$$

- 也就是把任意两个属性的顺序对调都是同样的态，因此

$$\psi=\sum_i c_i\left|n;b_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\right\rangle$$

$$\left|n;b_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\right\rangle=\frac{1}{n!}\sum_P P\left|b_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\right\rangle$$

- N个粒子的希尔伯特空间维数为 s^n
- N个全同粒子的希尔伯特空间维数为 $\dfrac{s^n}{n!}$

N个全同粒子的希尔伯特空间

- N个全同粒子构成了希尔伯特空间H^n，其中，所有的向量$|n;b_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\rangle=\frac{1}{n!}\sum_P P|b_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\rangle$构成了$H^n$中的一组基。可以证明这些向量彼此正交、归一。
- 定义产生算符

$$a^+(b)|n;b_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\rangle=\sqrt{n+1}|n+1;bb_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\rangle$$

- 同样的道理可以定义湮灭算符

$$a(b)|n;b_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\rangle=\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\delta(b-b_\alpha)|n-1;b_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\rangle+\delta(b-b_\beta)|n-1;b_\alpha b_\beta\cdots b_\upsilon\rangle+\cdots\right]$$

- 在这里，产生、湮灭算符的性质与谐振子的类似
- 但是产生湮灭算符并不是H^n中的算符

$$a^+:H^n\to H^{n+1},a:H^n\to H^{n-1}$$

Fock空间

- 事实上产生湮灭算符联系了H^n和H^{n+1}
- 可以将所有这些H^n联在一起定义一个更大的空间：Fock空间，或者称为巨希尔伯特空间

$$F = H^0 \oplus H^1 \oplus \cdots \oplus H^n \oplus \cdots$$

- 其中F中的任意一个态向量可以表示为：

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= c_0|0\rangle + c_1\left(\alpha|b_1\rangle + \beta|b_2\rangle + \cdots + \gamma|b_s\rangle\right) + c_2\left(\mu|b_1b_2\rangle + \nu|b_1b_3\rangle + \cdots\right) + \cdots \\
&= c_0|0\rangle + c_1|\psi\rangle + c_2|\psi_1\psi_2\rangle + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} c_i \left|\prod_{j=1}^{i} \psi_j\right\rangle
\end{aligned}$$

- 也就是说这个态是所有可能个粒子状态的叠加
- 产生湮灭算符即该空间中的算符

Fock空间举例

- 假设单个粒子的状态B={1,2}
- 粒子数的上限为2个
- 那么Fock空间 $F = \prod_{i=0}^{2} H_i$
- Fock空间中所有可能的基态：|0>：没有粒子,|1>：一个粒子的属性为1,|2>：一个粒子的属性为2；|11>：两个粒子，一个粒子属性为1另一个为1；|12>：两个粒子，一个粒子属性为1另一个为2；|22>：两个粒子，一个粒子属性为2另一个为2。
- 可以证明这些基彼此之间正交、归一，因此可以取如下坐标 |0>=(1,0,0,0,0,0)^T, |1>=(0,1,0,0,0,0)^T, |2>=(0,0,1,0,0,0)^T, |11>=(0,0,0,1,0,0)^T, |12>=(0,0,0,0,1,0)^T, |22>=(0,0,0,0,0,1)^T
- 那么该空间中的产生湮灭算符为：

$$a^{+}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a^{+}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

产生、湮灭算符的通用性

- 利用产生、湮灭算符可以表达任意算符

$$N(b)=a^{\dagger}(b)\,a(b)\,,\qquad N=\int \mathrm{d}b N(b)$$

$$G=\iint \mathrm{d}b^{\alpha'}\,\mathrm{d}b^{\alpha}a^{\dagger}(b^{\alpha'})\langle b^{\alpha'}|g^{(1)}|b^{\alpha}\rangle a(b^{\alpha})$$

$$+\frac{1}{2!}\iint \mathrm{d}b^{\alpha'}\,\mathrm{d}b^{\beta'}\iint \mathrm{d}b^{\alpha}\,\mathrm{d}b^{\beta}a^{\dagger}(b^{\alpha'})a^{\dagger}(b^{\beta'})\langle b^{\alpha'}b^{\beta'}|g^{(2)}|b^{\alpha}b^{\beta}\rangle a(b^{\beta})a(b^{\alpha})$$

$$+\frac{1}{3!}\iiint \mathrm{d}b^{\alpha'}\,\mathrm{d}b^{\beta'}\,\mathrm{d}b^{\gamma'}\iiint \mathrm{d}b^{\alpha}\,\mathrm{d}b^{\beta}\,\mathrm{d}b^{\gamma}a^{\dagger}(b^{\alpha'})a^{\dagger}(b^{\beta'})a^{\dagger}(b^{\gamma'})$$

$$\times\langle b^{\alpha'}b^{\beta'}b^{\gamma'}|g^{(3)}|b^{\alpha}b^{\beta}b^{\gamma}\rangle a(b^{\gamma})a(b^{\beta})a(b^{\alpha})+\cdots \qquad (31.35)$$

$$H=\int \mathrm{d}x\,\psi^{\dagger}(x)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(x)$$

$$+\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\,\psi^{\dagger}(x)\psi^{\dagger}(x')V(|x-x'|)\psi(x')\psi(x)$$

相干态

相干态的引入

- 我们注意到，新引入的产生湮灭算符a^+,a并不是厄秘算符（也就是它们的本征值不一定为实数，而且a^+<>a）
- 但是由于a算符很奇特，因此我们有必要深入研究它。
- 虽然a不是厄秘算符，但是，如果我们非要研究它的本征值和本征向量怎么办？

$$a|z\rangle = z|z\rangle$$

- 这个方程是有解的，得到的z是湮灭算符a的本征值，它一般地为复数。
- 相应的本征态|z>称为相干态（coherent state）
- 相干态有很多奇特的性质，特别是在量子光学中有很大的作用。而且似乎蕴含着另类的“哲学”

谐振子相干态的性质

- 首先根据定义式以及湮灭算符的性质可以计算出：

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-|z|^2/2}e^{za^+}|0\rangle$$

- 带入薛定谔方程，得到|z(t)>: $|z(t)\rangle = e^{-\frac{it}{h}H}|z\rangle = e^{-it\omega(a\cdot a^+ +1/2)}|z\rangle$
- 计算在相干态的时候位置算符X的均值（即简谐振子的平均位置）

$$\langle z(t)|X|z(t)\rangle = \sqrt{\frac{h}{2m\omega}}\langle z(t)|(a^+ + a)|z(t)\rangle = \sqrt{\frac{h}{2m\omega}}\langle z|e^{i\omega t a^+ a}(a^+ + a)e^{i\omega t a^+ a}|z\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{h}{2m\omega}}(\langle z|a^+|z\rangle e^{i\omega t} + \langle z|a|z\rangle e^{-i\omega t}) = \sqrt{\frac{h}{2m\omega}}(z^* e^{i\omega t} + ze^{-i\omega t})$$

令： $z = re^{-i\theta}$ 得到：

$$\langle z(t)|X|z(t)\rangle = \sqrt{\frac{h}{2m\omega}}(re^{i(\omega t+\theta)} + re^{-i(\omega t+\theta)}) = \sqrt{\frac{2h}{m\omega}}r\cos(\omega t+\theta)$$

这相当于经典的谐振子的位移，同样可以计算平均动量

$$\langle z(t)|P|z(t)\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega h}{2}}\langle z|e^{it\omega a^+ a}(a^+ - a)e^{-it\omega a^+ a}|z\rangle =$$

$$= i\sqrt{\frac{m\omega h}{2}}(\langle z|a^+|z\rangle e^{it\omega} - \langle z|a|z\rangle e^{-it\omega}) = i\sqrt{\frac{m\omega h}{2}}(z^* e^{it\omega} - ze^{-it\omega}) = -\sqrt{2m\omega h}r\sin(\omega t+\theta)$$

谐振子相干态下的分布

- 在相干态表象下位置的分布

$$\left|\langle x|z(t)\rangle\right|^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi h}}\exp\left(-\left(\sqrt{\frac{m\omega}{h}}x-\sqrt{2}r\cos(\omega t+\theta)\right)^2\right)$$

- 同样的道理，在相干态下动量的分布：

$$\left|\langle p|z(t)\rangle\right|^2\propto\exp\left(-\left(cp-c'r\sin(\omega t+\theta)\right)^2\right)$$

- 也就是说，在相干态下，量子谐振子形成的运动的概率云就是围绕着经典谐振子的轨迹，呈现正态分布展开
- 呈现正态分布的意义不仅和经典逼近，而且是不确定性最小的状态，可以证明：

$$\langle z(t)|\Delta X\Delta P|z(t)\rangle=h/2$$

相干态表象

- 首先，相干态集合具备如下性质

$$\langle z|z'\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2-\frac{1}{2}|z'|^2+z^*z'}$$

$$\langle z|z\rangle = 1$$

- 超归一性 $\frac{1}{\pi}\int |z\rangle\langle z| d^2z = 1$
- 可以把相干态集体看作一种坐标系（表象），在这个表象下可以定义准经典概率分布
- 我们知道，任何一个量子随机系统（经典随机与量子随机的混合）都可以用密度矩阵ρ来表示。
- 则可以定义一个函数Q(z,z*)满足： $Q(z,z^*) = \frac{1}{\pi}\langle z|\rho|z\rangle$
- 则P(z,z*)具有类似概率分布函数的性质 $\int Q(z,z^*)d^2z = 1$
- 类似的均值公式 $\langle a^r(a^+)^s\rangle = \int z^r(z^*)^s Q(z,z^*)d^2z$
- 很多量子力学公式可以转化为相应相干态表象下的类经典统计力学公式。

猜想

- 是否可以根据产生、湮灭算符出发，重新构造一套新的量子力学?
- 产生、湮灭算符的特点：形式简洁、哲学味道深刻
- 产生、湮灭算符具有一定的通用性
- 湮灭算符的特征向量即相干态具备很好的准经典概率分布的性质
- 也就是说，我们可以把任何系统的量子态转化成类经典的复数域上面的概率分布
- 这样，可以针对已得到的经典统计力学方程在复数域上进行扩展。
- 是否任何一个实数变量都可以被复数化?

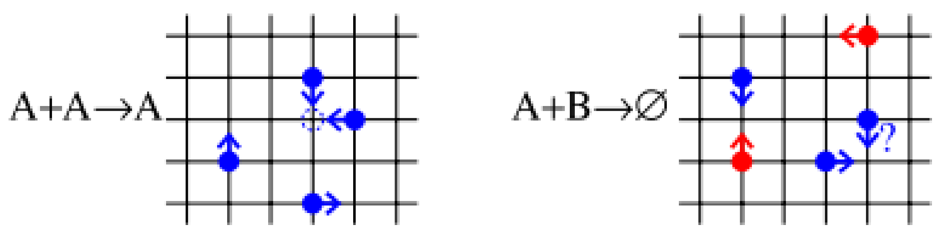
产生湮灭算符在反应扩散问题中的应用

产生湮灭算符的哲学与应用

- 产生湮灭算符表达了一种创生的哲学
- 万物有生有灭
- 生灭现象不仅仅量子系统中具备，经典随机系统中也有
- 诸如如下形式的化学反应系统

$$A \to 2A$$
$$A + B \to 2B$$
$$B \to \varnothing$$

- 反应扩散系统：

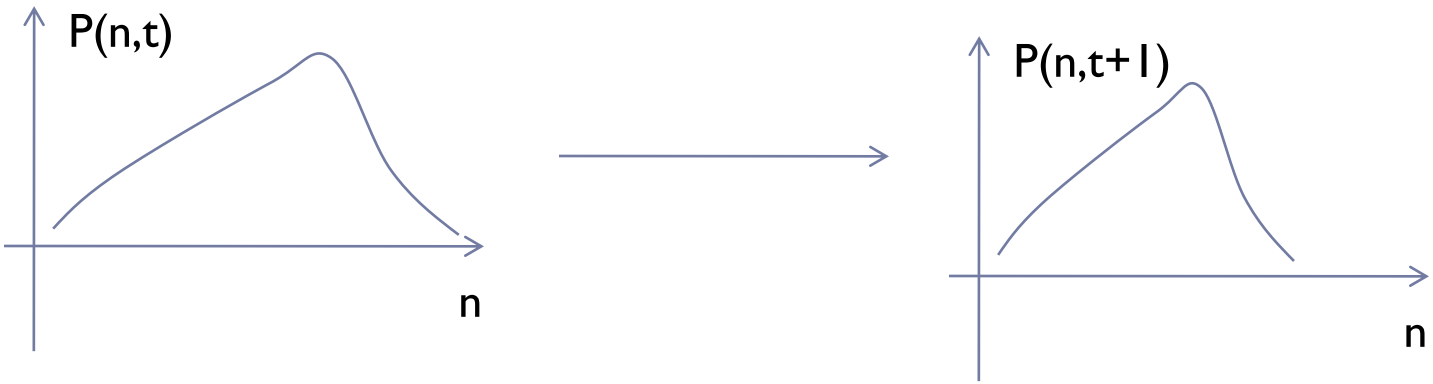


参考：

- http://boulder.research.yale.edu/Boulder-2009/Lectures/Vollmayr-Lee/vollmayrlee2v2.pdf

A+A→0

- 写下该系统的概率主方程（经典概率）



$$\frac{\partial P(n,t)}{\partial t}=\lambda\left[(n+2)(n+1)P(n+2,t)-n(n-1)P(n,t)\right]$$

化学反应速度

从n个粒子转移出去的概率

从n+2个粒子状态转移到n个粒子状态的概率

引入产生湮灭算符

- 引入产生湮灭算符a,a+
- 假设没有粒子的状态为|0>，有n个粒子的状态为|n>
- 则有：$(a^+)^n|0\rangle=|n\rangle$ ，注意归一化条件与量子力学不一样
- 并且：

$$a^+|n\rangle=|n+1\rangle,\quad a|n\rangle=n|n-1\rangle\quad a^+a|n\rangle=n|n\rangle$$

- 我们可以把概率分布装进一个Fock空间：

$$|\phi(t)\rangle=\sum_n P(n,t)|n\rangle$$

- 写下类似薛定谔方程的演化方程

$$\frac{d|\phi(t)\rangle}{dt}=-H|\phi(t)\rangle$$

- 其中，H可以根据概率主方程构建

得到类薛定谔方程

$$\frac{\partial P(n,t)}{\partial t}=\lambda\left[(n+2)(n+1)P(n+2,t)-n(n-1)P(n,t)\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{d|\phi(t)\rangle}{dt}&=\lambda\sum_n\left[(n+2)(n+1)P(n+2,t)|n\rangle-n(n-1)P(n,t)|n\rangle\right]\\&=\lambda\sum_n\left[P(n+2,t)(n+2)(n+1)|n\rangle\right]-\sum_n\left[P(n,t)n(n-1)|n\rangle\right]\\&=\lambda\sum_n\left[P(n+2,t)a^2|n+2\rangle\right]-\sum_n\left[P(n,t)a^{+2}a^2|n\rangle\right]\\&=\lambda\left(a^2\sum_n\left[P(n+2,t)|n+2\rangle\right]-a^{+2}a^2\sum_n\left[P(n,t)|n\rangle\right]\right)\\&=\lambda\left(a^2-a^{+2}a^2\right)|\phi(t)\rangle\end{aligned}$$

- 所以H就是：

$$H=-\lambda\left(a^2-a^{+2}a^2\right)$$

- 注意：H不是厄米矩阵，因此一般不代表能量

考虑一维扩散过程

- 考虑空间中任意相邻的2个相邻格点i,j主方程可以写作：

$$\frac{\partial P(n_i,n_j,t)}{\partial t}=\kappa\left[(n_i+1)P(n_i+1,n_j-1,t)+(n_2+1)P(n_i-1,n_j+1,t)-(n_i+n_j)P(n_i,n_j,t)\right]$$

- 定义产生湮灭算符ai,ai+

$$\left|n_i,n_j\right\rangle=\left(a_i^{+}\right)^{n_i}\left(a_j^{+}\right)^{n_j}\left|0\right\rangle$$

- 化成类薛定谔方程

$$\begin{aligned}\frac{d\left|\phi(t)\right\rangle}{dt}&=\kappa\sum\nolimits_{n_i,n_j}\left[P(n_i+1,n_j-1,t)(n_i+1)\left|n_i,n_j\right\rangle+P(n_i-1,n_j+1,t)(n_j+1)\left|n_i,n_j\right\rangle-P(n_i,n_j,t)(n_i+n_j)\left|n_i,n_j\right\rangle\right]\\&=\kappa\sum\nolimits_{n_i,n_j}\left[P(n_i+1,n_j-1,t)a_j^{+}a_i\left|n_i+1,n_j-1\right\rangle+P(n_i-1,n_j+1,t)a_i^{+}a_j\left|n_i-1,n_j+1\right\rangle-P(n_i,n_j,t)(a_i^{+}a_i+a_j^{+}a_j)\left|n_i,n_j\right\rangle\right]\\&=\kappa\left(a_j^{+}a_i+a_i^{+}a_j-a_i^{+}a_i-a_j^{+}a_j\right)\left|\phi(t)\right\rangle\\&=-\kappa\left(a_i^{+}-a_j^{+}\right)\left(a_i-a_j\right)\left|\phi(t)\right\rangle\end{aligned}$$

- 对于任意格点的扩散过程

$$H_D=\frac{D}{(\Delta x)^2}\sum_{<ij>}\left(a_i^{+}-a_j^{+}\right)\left(a_i-a_j\right)$$

使用产生湮灭算符的好处

- 形式上更优美
- 可以与量子场论建立联系
- 重新用路径积分法进行表示