群论与量子“旋转”(All about rotation)

Jake

量子力学补习班(4)

集智俱乐部

今日内容

- 量子力学与（李）群论
  - 量子力学中的对易子
  - 群论基本知识
  - 平移对称与动量
- 关于空间中的旋转
  - SO(3)群
  - SU(2)群
  - 自旋
- 洛仑兹变换与狄拉克场
  - 相对论简介
  - 洛伦茨群
  - 狄拉克方程
  - 狄拉克场

量子力学与群论

量子力学中的群论

- 任何物理理论只有得到了新数学的支持才能获得广泛的应用
- 量子力学，特别是量子场论涉及的新数学不仅仅是希尔伯特空间，还包括群论
- 没有群论的量子场论虽然也能构建起来，但是会变得异常冗余、繁琐

Hermann Weyl (1885-1955)

量子力学中的对易子

- 量子力学中，一条重要的原理就是指出位置算符与动量算符之间的对易关系为：[X,P]=ih
- 除了这组共轭属性外，还存在着其它对易关系，例如：[Jx,Jy]=ihJz
- 由对易关系不仅可以得到不确定性原理，而且还可以推出很多其他的属性
- 对易关系成为扩展量子力学到其他学科中的关键问题
- 对易子是一种李代数

Eugene Wigner(1902-1995)

群论基本知识

- 何为群？
  - 集合G，集合上的运算*，如果G, *满足如下三条：

$$\exists e \in G, \forall g \in G : g * e = g$$ 存在单位元

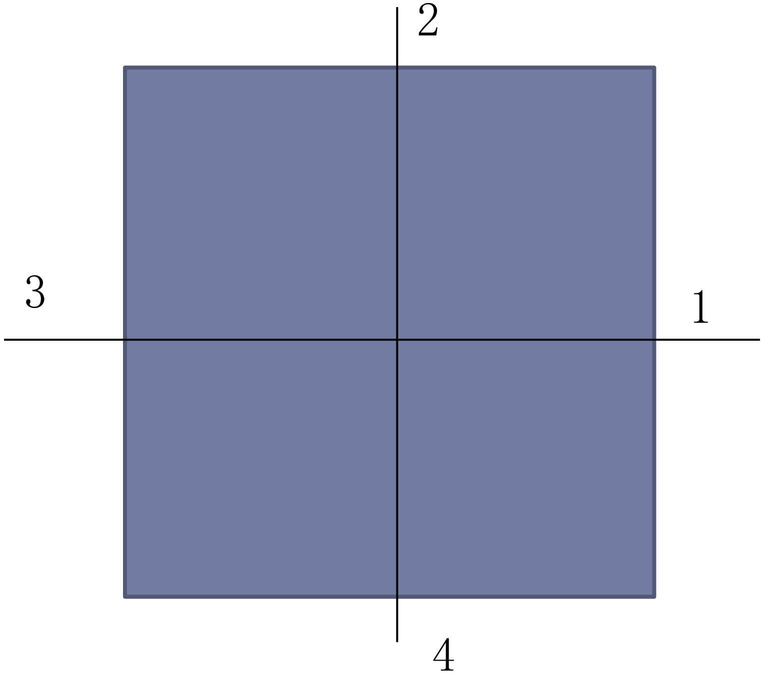
$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G : g * g^{-1} = e$$ 存在逆元

$$\forall a, b, c \in G : a * (b * c) = (a * b) * c$$ 乘法的结合律

- 有限群，集合G中的元素个数有限。例如：模5的加法运算。
- 无限群：群中的元素有无限个
- 阿贝尔群：如果任意两个元素满足交换律（Commutation）：a*b=b*a，则该群为阿贝尔群

用群表示对称变换

- 可以用群来表示对称变换，例如D_2群

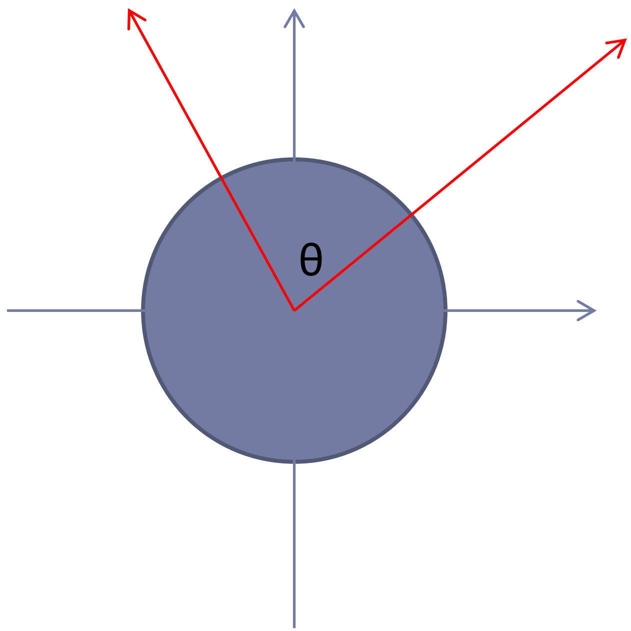


e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

e:不进行任何操作，a:沿2-4轴对折，b:沿1-3轴对折；c:旋转180度
注意：G中的元素是变换，而非点
只有满足轴对称和原点对称的二维图形才是在该群下不变的图形

连续对称群

- 平面中的旋转构成了连续群SO(2)



$$G = \{R(\theta) \mid \theta \in R\}$$

$$R(\theta_2) * R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2) \in G$$

$$R(\theta) * R(0) = R(\theta)$$

$$R(\theta) * R(-\theta) = R(0)$$

注意，变换R保持向量的长度不变

同态与表示

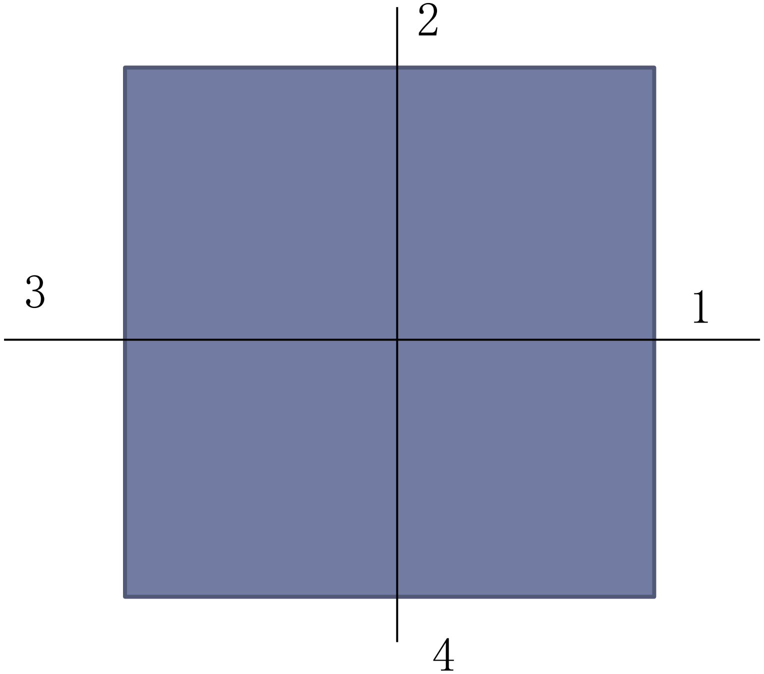
- 设取(G, *)和(H, o)
  - 若存在一映射f，则同态

$$f : G \to H$$
$$if\ \ a * b = c$$
$$then\ f(a) \circ f(b) = f(c)$$

- 如果H为作用在线性空间V上的线性算符，则同态f就成为对原群的一个表示
- 在这个同态中，群的元素映射为矩阵，乘法映射为矩阵乘法，单位元素映射为单位矩阵I，逆运算映射为矩阵的逆运算

群的表示

- D_2群的表示



$$U(e)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},U(a)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$U(b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},U(c)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

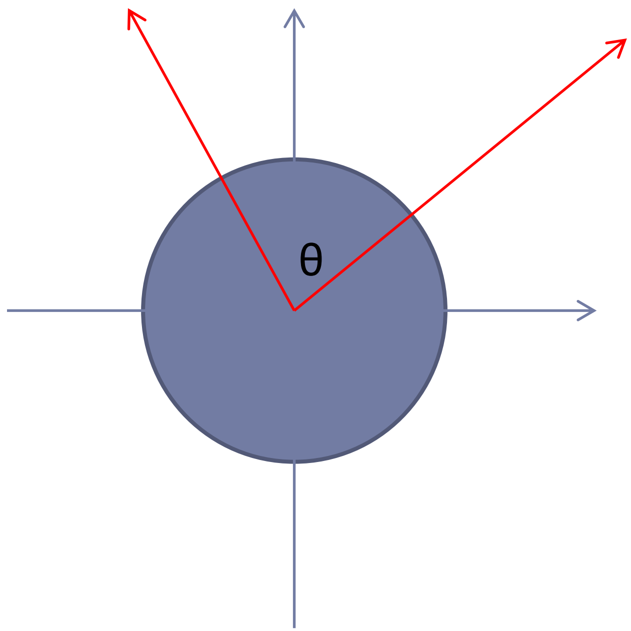
e:不进行任何操作，a:沿2-4轴对折，b:沿1-3轴对折；c:旋转180度

注意：G中的元素是变换，而非点

只有满足轴对称和原点对称的二维图形才是在该群下不变的图形

连续对称群

- 平面中的旋转构成了连续群SO(2)



$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

注意到：

$$R^T(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=R(-\theta)$$

$$\therefore R^T R = I = R(0)$$

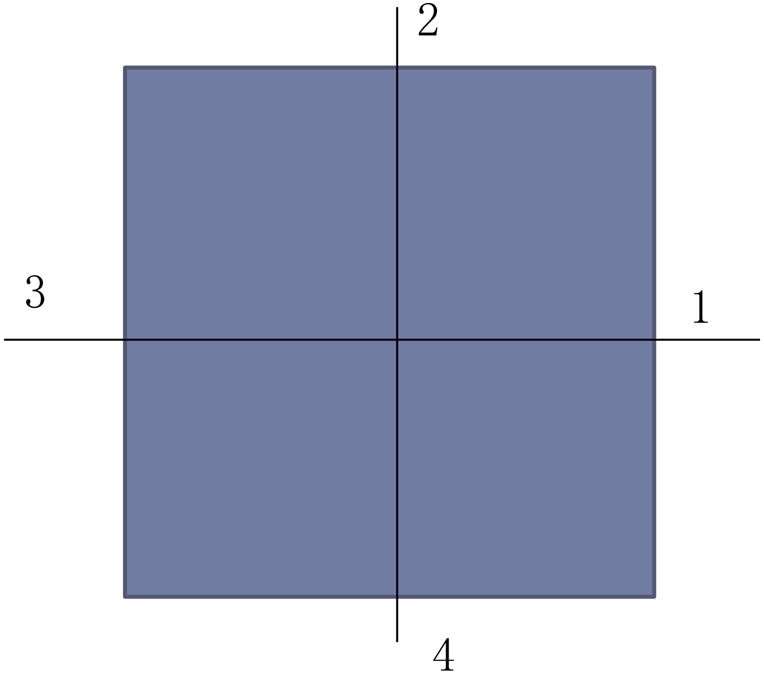
所以R为正交群Orthonormal

约减与不可约表示

- 设群G以及相应的表示U，设U中算符作用的线性空间为V
- 如果存在V的子空间V’使得V’构成一个不变子空间，即对于任意的群元素表示U(g)，它作用到任意的V’中的元素v上得到的元素仍然在V’中，则称U是可以约简的，否则若存在着这样的非平凡的不变子空间则是不可约简的(Irreducible)
- 注意，群U的不可约表示可能不止一个。
- 平凡的不变子空间包括V以及{0}空间

群的表示

- D_2群表示的约减



$$U(e)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},U(a)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

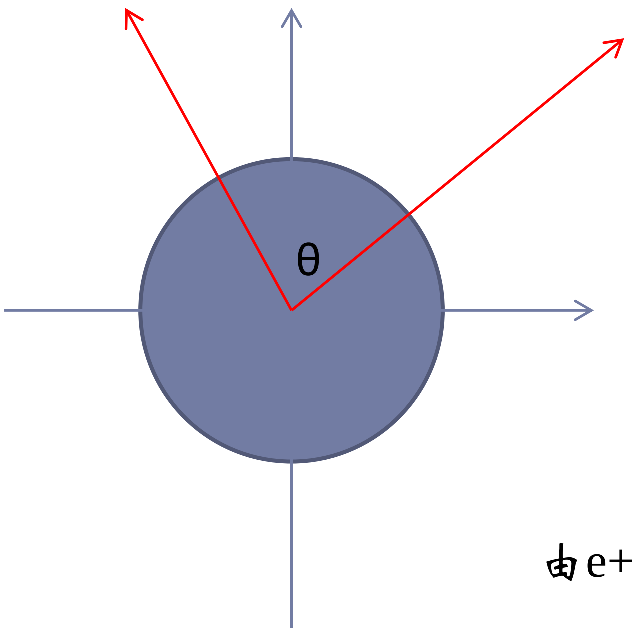
$$U(b)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},U(c)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

这个群表示是可以约减的
V'={(x,0)|x is real}是一个不变子空间
显然，另外一个不变子空间是：
V''={(0,x)|x is real}
注意，
V={(x,x}|x is real}就不是这样的不变子空间

注意V'和V''都是不可约的，为什么？

连续对称群

- 平面中的旋转构成了连续群SO(2)



$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

该表示也非不可约的，因为可以找到一个不可约子空间

因为R的空间为{(x,y)}，该空间的一组基为e1=(1,0)，e2=(0,1)，构造一个复向量

$$e^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-ie_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

由e+张成的一维子空间为不变的子空间

$$R(\theta)ze^{+}=\frac{z}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=\frac{z}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta-i\sin\theta\\ -\sin\theta-i\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{z}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\theta}\\ -ie^{-i\theta}\end{pmatrix}=\frac{ze^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

同理由基向量张成的空间也是不变子空间 $e^{-}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1-ie_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ -i\end{pmatrix}$

空间平移变换群（李群）

- 空间平移群：

$$T(y)*T(x)=T(x+y)$$
$$T(x)*T(-x)=T(0)$$
$$T(x)*T(y)=T(y+x)=T(x+y)=T(y)*T(x)$$

- 该群的无穷小生成元（Generator）为：

$$T(dx)=E-iPdx+o(dx)$$

$$P=\frac{dT}{dx}$$ 生成元

- 则该群任意一个元素可以写成

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}\left(T\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(E-iP\frac{x}{n}\right)^n=e^{-iPx}$$

- 因此，T(x)群的性质由P决定

空间平移变换群的不可约表示

- 对于任意阿贝尔群，它的所有不可约表示都是一维的
- 这些不可约表示由P唯一确定

$$P|p\rangle = p|p\rangle$$

- 其中，p为P的特征值，为任意实数

$$U^p(x)|p\rangle = e^{-ipx}|p\rangle$$

- 对于指定的p，由向量|p>张成的一维线性空间为变换群T(x)的一个不变子空间
- 在由向量|p>为基张成的一维线性空间中，算符Exp(−ipx)构成了一个不可约表示$U^p(x)$
- 因为p为任意实数，所以这种表示$U^p(x)$也就有无穷多种

不可约表示的正交归一化关系

- 由群论可以证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_p^+(x) U^{p'}(x) dx = 2\pi\delta(p-p')$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U^p(x') U_p^+(x) dp = 2\pi\delta(x-x')$$

- 也就是说表示U对于群指标x和不可约表示的指标p来说都是正交归一的。
- 设粒子位于位置x0的状态用|x0>来表示，则根据T(x)的定义： $T(x)|x_0\rangle = |x+x_0\rangle$
- 可以将任意态|x>用基|p>来表示

$$|x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp|p\rangle\langle p\|x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp|p\rangle\langle p|U_p(x)|0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp|p\rangle\langle U_p^+ p\|0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp|p\rangle e^{-ipx}\frac{1}{2\pi}$$

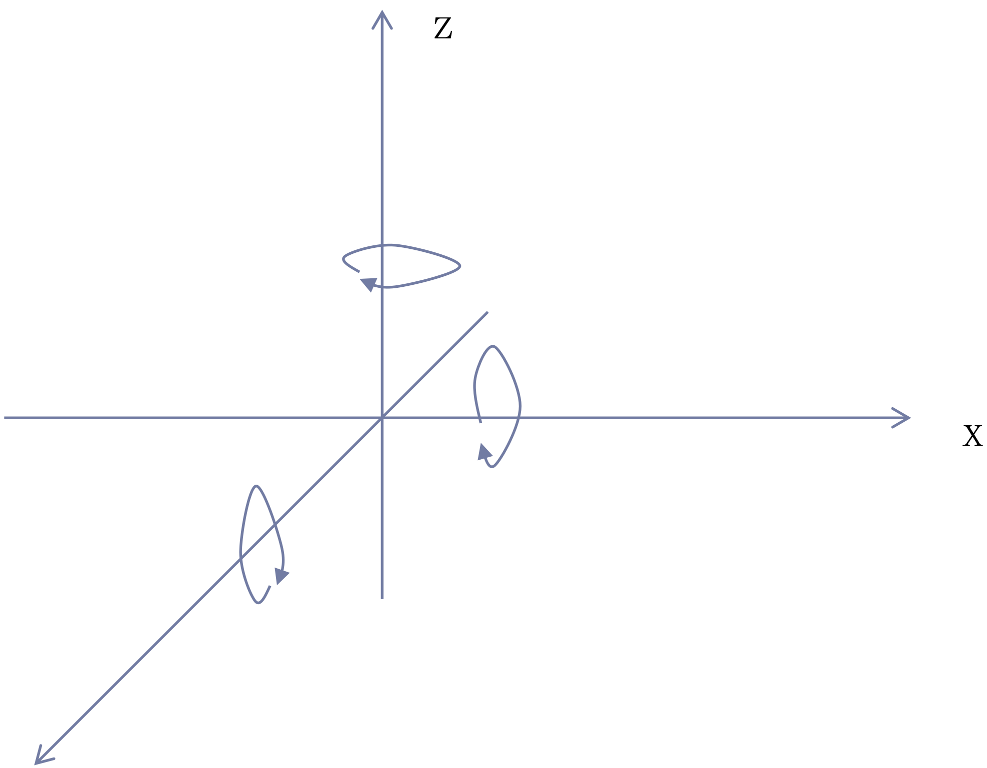
- 同样的道理

$$|p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx}|x\rangle$$

$$\langle x|p\rangle = e^{-ixp}$$

空间中的旋转

SO(3)群



- 三维旋转可以用3*3的矩阵表示

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix},$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{pmatrix},$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SO(3)群的生成元

- 对于任意的lie群，它的生成元为：

$$J=-i\frac{dR}{d\theta}\Big|_{\theta=0}$$

$$R=E-iJ\theta+O(\theta^2)$$

- 因此SO(3)的生成元有3个（3个自变量）：

$$J_x=\frac{1}{i}\frac{\partial R_x}{\partial\theta_1}\Big|_{\theta_1=0}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},J_y=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},$$

$$J_z=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

- 因此SO(3)群可以表示成 $e^{-i\boldsymbol{\theta}\mathbf{J}}$

对易子与lie代数

- 可以验证，这些生成元满足如下对易式：

$$[J_x, J_y] = iJ_z,$$

$$[J_y, J_z] = iJ_x,$$

$$[J_z, J_x] = iJ_y$$

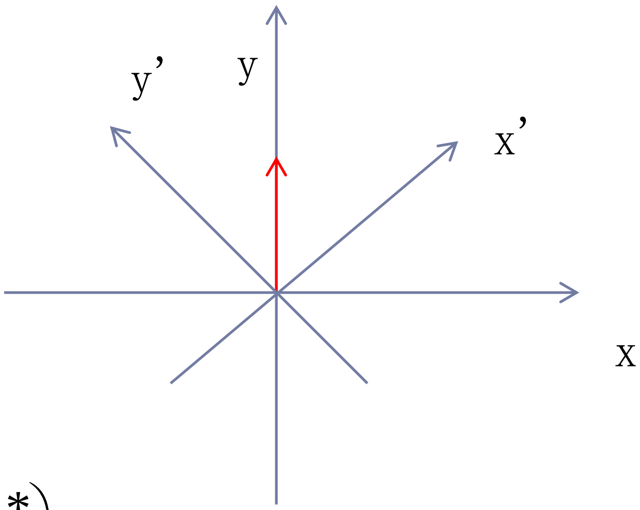
- 因此这些生成元，联合这组对易关系构成了一个lie代数
- 根据量子力学，三个方向的角动量Jx, Jy, Jz也满足同样的对易关系

SU(2)群

- 2维复空间中的“复旋转”

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$a,b,c,d\in C$$



- 满足幺正性，即：

$$AA^{+}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa^*+bb^* & ac^*+bd^* \\ ca^*+db^* & cc^*+dd^* \end{pmatrix}=I$$

- 以及行列式为1，即det(A)=1
- 则所有的复矩阵A构成了SU(2)群

SU(2)与SO(3)

- SU(2)群可参数化为：

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta e^{i\xi} & -\sin\theta e^{i\eta}\\ \sin\theta e^{-i\eta} & \cos\theta e^{-i\xi}\end{pmatrix}$$

- 有三个独立参数
- 可以构造从SU(2)操作空间(s, t)到SO(3)操作空间(x, y, z)的映射如下：

$$x=\frac{1}{2}\left(t^2-s^2\right), y=\frac{1}{2i}\left(t^2+s^2\right), z=st$$

- 针对任意SU(2)变换A作用到(s, t)等价于一个SO(3)变换R作用到(x, y, z)上

$$R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(\cos^2\theta\left(e^{2i\xi}+e^{-2i\xi}\right)-\sin^2\theta\left(e^{2i\eta}+e^{-2i\eta}\right)\right) & -\frac{i}{2}\left(\cos^2\theta\left(e^{2i\xi}-e^{-2i\xi}\right)+\sin^2\theta\left(e^{2i\eta}-e^{-2i\eta}\right)\right) & \sin\theta\cos\theta\left(e^{-i(\xi+\eta)}-e^{i(\xi+\eta)}\right)\\ \frac{i}{2}\left(\cos^2\theta\left(e^{2i\xi}-e^{-2i\xi}\right)+\sin^2\theta\left(e^{2i\eta}-e^{-2i\eta}\right)\right) & \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta\left(e^{2i\xi}+e^{-2i\xi}\right)-\sin^2\theta\left(e^{2i\eta}+e^{-2i\eta}\right)\right) & -i\sin\theta\cos\theta\left(e^{-i(\xi+\eta)}+e^{i(\xi+\eta)}\right)\\ -\sin\theta\cos\theta\left(e^{i(\xi-\eta)}+e^{i(\eta-\xi)}\right) & -i\sin\theta\cos\theta\left(e^{i(\eta-\xi)}-e^{i(\xi-\eta)}\right) & i\sin\theta\cos\theta\left(e^{i(\xi+\eta)}-e^{-i(\xi+\eta)}\right)\end{pmatrix}$$

且能保证R*R^T=I

SU(2)与SO(3)

- SU(2)群可以写成：

$$A = e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\theta_k},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

泡利矩阵

- SU(2)与SO(3)的对应

$$A = e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\theta_k} \rightarrow R = e^{i\sum_{k=1}^{3}J_k\theta}$$

- SU(2)群操作的旋转空间为自旋空间！

SU(2)的生成元

- 我们知道任意一个SU(2)群可以表示为：

$$A = e^{\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\theta_k},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 其中，生成元满足如下对易关系：

$$[\sigma_x/2, \sigma_y/2] = i\sigma_z/2,$$

$$[\sigma_y/2, \sigma_z/2] = i\sigma_x/2,$$

$$[\sigma_z/2, \sigma_x/2] = i\sigma_y/2$$

$$J_k = \sigma_k/2$$

SU(2)的不可约表示

- 要求SU(2)的不可约表示就需要知道这些生成元的特征值及 特征向量。
- 然而根据对易关系可以知道，每个生成元都有不同的特征值和特征向量。
- 因此，需要找到一个新的算符，它与这些生成元都对易，这种算符称为Casmir算符
- 可以验证

$$J^2=\sum_{k=1}^{3}J_k^2,\left[J^2,J_k\right]=0$$

- 为这种算符，并选J^2和任意一个算符J_3构成的子空间求解她们的特征值和特征向量

特征值与特征向量

- 同时对角化两个算符J^2和J_3，可以得到两组特征值(j,m)
- 其中j的取值：{0,1/2,1,3/2,…n/2,…}
- M的取值：{j,j-1,j-2,…,2-j,1-j,-j}
- SU(2)的不可约表示为：

$$J^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle$$
$$J_3|jm\rangle = m|jm\rangle$$

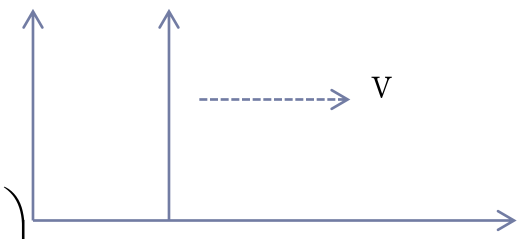
- 当j=1/2的时候，就表示自旋为1/2的粒子，J_1,J_2,J_3就是前面的泡利矩阵。
- 当j=1的时候，三个矩阵为：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

洛伦兹群与狄拉克场

Special theory of relativity

- Lorenz transformation



$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\beta = v^2 / c^2$$

$$LL^T = I,$$

- Then constant speed motion is a rotation in 4-d space
- $\Delta D = \sum_{\mu} \Delta x_{\mu}^2$ is invariant under the transformation

Intrinsic Time

- Define intrinsic time as $d\tau \equiv i\Delta D / c$
- It can be calculated by a moving frame with a clock

$$\begin{pmatrix} dx_0' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\, dx_0$$

- Then d**τ** is invariant under Lorenz transformation

4-d velocity

- 4-d velocity

$$dX' = LdX$$

$$dX'/d\tau = LdX/d\tau$$

$$U' = LU$$

$$U = \left(\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{v} \right)$$

- 4-d momentum

- Energy

$$P = \left(\frac{im_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{v} \right), P' = \left(\frac{im_0 c}{\sqrt{1-\beta'^2}}, \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta'^2}} \mathbf{v}' \right)$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Momentum and energy relationship

- Inner product of 4-d momentum

$$P = \left(\frac{im_0 c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} 0, 0, \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \left(\frac{iE}{c}, \mathbf{p}\right),$$

$$\sum_\mu P_\mu{}^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \mathbf{p}^2 = -\frac{m_0^2 c^2}{1-(v/c)^2} + \frac{m_0^2 v^2}{1-(v/c)^2} = -m_0^2 c^2$$

- The energy-momentum relation

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2$$

洛伦兹变换——时空中的虚旋转

洛伦茨变换：

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B_x \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$where,\ \beta = v/c, \alpha = \mathrm{arctanh}(\beta)$$

其中：

$$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^{-i(i\alpha)} + e^{i(i\alpha)}}{2} = \frac{\cos(i\alpha) - \sin(i\alpha) + \cos(i\alpha) + \sin(i\alpha)}{2} = \cos(i\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} \cos i\alpha & \sin i\alpha & 0 & 0 \\ -\sin i\alpha & \cos i\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorenze boost

洛仑兹群

- **洛仑兹群可以分解成：**
  - 三个方向的Lorenze boost （K）
  - 三个方向的旋转（SO(3)）
- **洛伦茨群一共有6个生成元：** Kx, Ky, Kz, Jx, Jy, Jz

$$K_x = \frac{1}{i}\frac{dB_x}{d\alpha_x}\bigg|_{\alpha_x=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_z = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_x = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_z = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

洛仑兹群

- 洛仑兹群生成元的对易关系：

$$\left.\begin{aligned}
[K_x, K_y] &= -\mathrm{i}J_z \text{ and cyclic perms,} \\
[J_x, K_x] &= 0 \text{ etc.,} \\
[J_x, K_y] &= \mathrm{i}K_z \text{ and cyclic perms,}
\end{aligned}\right\}$$

- 洛伦茨群可以一般地表示为：

$$L = \exp i\left(K_x\alpha_x + K_y\alpha_y + K_z\alpha_z + J_x\theta_x + J_y\theta_y + J_z\theta_z\right)$$

L=SU(2)*SU(2)

- 如果我们定义：

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{K} + i\mathbf{J} \\ \mathbf{V} = \mathbf{K} - i\mathbf{J} \end{cases}$$

- 这里， **U**=(Ux,Uy,Uz),**K**=(Kx,Ky,Kz),**J**=(Jx,Jy,Jz)
- 那么，可以得到下列的对易关系：

$$\begin{cases} [U_x,U_y]=iU_z,[U_y,U_z]=iU_x,[U_z,U_x]=iU_y \\ [V_x,V_y]=iV_z,[V_y,V_z]=iV_x,[V_z,V_x]=iV_y \\ [U_i,V_j]=0,i,j\in\{x,y,z\} \end{cases}$$

- U 和V 都是J旋转矩阵（泡利矩阵）
- 因此，L←→SU(2)*SU(2)

洛仑兹群的不可约表示

- 我们知道U, V相当于SU(2)中的J，而J的特征向量有多种情况：j=0, 1/2, 1, …
- 分类讨论：
  - (0, 0)，整体仅仅有一个状态，这样，Lorenze群的表示作用空间为一维，Klein Gordon场
  - (0, 1/2)或者(1/2, 0)，这样整体有两种状态，分别可以用一个旋量ψ_L=(z1, z2)表示.
  - (1/2, 1/2)，整体有四种状态。
- 对于(j,j')当j<>j'的时候L是不可约的。
  - 即(0, 1/2)和(1/2, 0)会成对出现。这就是正电子和反电子
  - 该空间就是狄拉克旋量空间，(ψ_L, ψ_R)。其中，ψ_L=(z1, z2)，ψ_R=(z3, z4)

Dirac场

- 这样洛仑兹群L的操作空间就是狄拉克旋量：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}$$

- 根据洛仑兹群的不变性可以推出狄拉克方程

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m)\psi = 0,$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

- 对应的拉格朗日：

$$L = i\overline{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

Quantization of Dirac Field

- First, we may guess the dirac field can be composed as varies waves

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_s\left(a_p^s u(p,s)e^{-ipx}+b_p^{s^+}v(p,s)e^{ipx}\right)$$

- And the creation annihilation operators must follow anti-commutations:

$$\{a_p^r,a_q^{s^+}\}=\{b_p^r,a_q^{s^+}\}=(2\pi)^3\delta^{(3)}(p-q)\delta^{rs}$$

- So,

$$\left\{\psi_a(\mathbf{x}),\psi_b^\dagger(\mathbf{y})\right\}=\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ab};$$
$$\left\{\psi_a(\mathbf{x}),\psi_b(\mathbf{y})\right\}=\left\{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}),\psi_b^\dagger(\mathbf{y})\right\}=0.$$

- Then, the hamiltonian is diagonalized

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s E_{\mathbf{p}}\left(a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}a_{\mathbf{p}}^s+b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}b_{\mathbf{p}}^s\right)$$

Dirac Propagator

$$\langle 0| \psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s u_a^s(p)\bar{u}_b^s(p) e^{-ip\cdot(x-y)}$$

$$= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)},$$

$$\widetilde{S}_R(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}.$$

Grassmann Number

- Two grassmann number has the property:
- xy=−yx
- We know $x^2=0$
- By taylor' s expansion, for any function f(x)=a+bx

$$\int d\eta f(\eta) = \int d\eta(a+b\eta) = b \qquad \int d\eta f(\eta) = \int d\eta(a+b\eta) = -b$$

$$\int d\eta \int d\bar{\eta} e^{\bar{\eta}a\eta} = \int d\eta \int d\bar{\eta}(1+\bar{\eta}a\eta) = \int d\eta a\eta = a = e^{+\log a} \qquad \int d\eta \int d\bar{\eta} e^{\bar{\eta}A\eta} = \det A$$

Path integral

- For scalar field

$$Z = \int D\varphi e^{iS(\varphi)} = \int D\varphi e^{i\int d^4x \frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2 - (m^2 - i\varepsilon)\varphi^2]}$$

- Compared to t

- Where ψ is a grassmann number, then we have

$$Z = \int D\psi D\bar{\psi} e^{iS(\psi,\bar{\psi})} = \int D\psi \int D\bar{\psi} e^{i\int d^4x \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m + i\varepsilon)\psi}$$

- so

$$Z = \int D\psi \int D\bar{\psi} e^{i\int d^4x \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m + i\varepsilon)\psi} = C' \det(i\partial\!\!\!/ - m + i\varepsilon)$$

$$= C' e^{\mathrm{tr}\,\log(i\partial\!\!\!/ - m + i\varepsilon)}$$

$$\mathrm{tr}\,\log(i\partial\!\!\!/ - m) = \mathrm{tr}\,\log \gamma^5(i\partial\!\!\!/ - m)\gamma^5 = \mathrm{tr}\,\log(-i\partial\!\!\!/ - m)$$

$$= \frac{1}{2}[\mathrm{tr}\,\log(i\partial\!\!\!/ - m) + \mathrm{tr}\,\log(-i\partial\!\!\!/ - m)]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\log(\partial^2 + m^2).$$

$$Z = C' e^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\log(\partial^2 + m^2 - i\varepsilon)}$$

Dirac Propagator

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int D\psi\, D\bar{\psi}\, e^{i \int d^4x [\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]}$$

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = C'' e^{-i\bar{\eta}(i\partial\!\!\!/ - m)^{-1}\eta}$$

$$iS(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipx}}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon}$$

参考读物

- Matthew B. Robinson, Karen R. Bland, Gerald B. Cleaver, and Jay R. Dittmann: A Simple Introduction to Particle Physics Part I - Foundations and the Standard Model, http://arxiv.org/abs/0810.3328/
- Wu-Ki Tung: Group theory in physics, http://ishare.iask.sina.com.cn/f/6481614.html