$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi=0$$

Klein Gordon场

Jake

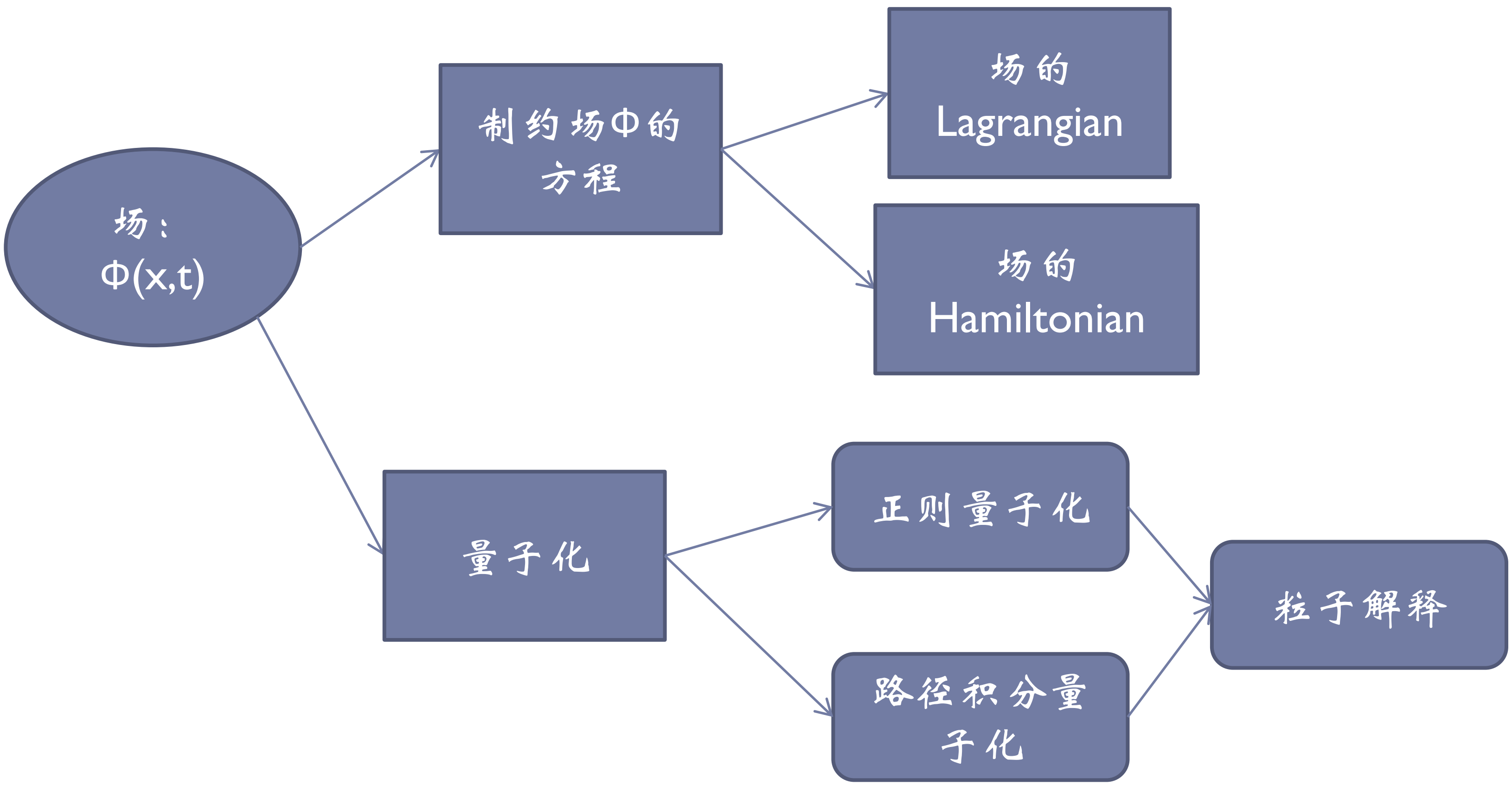
量子力学补习班(3)

集智俱乐部

今日内容

- 量子场论如何工作？
- 从多体弹簧谐振子到Klein Gordon场
  - 多体弹簧谐振子的Lagrangian, Hamiltonian
  - 从多粒子到场
  - Klein Gordon方程
  - 从位置空间到动量空间
- 正则量子化
  - Klein Gordon场的量子化
  - 产生湮灭算符
  - “虚粒子”的涌现
  - 从量子场论的观点谈涌现
- 路径积分量子化
  - Fayenman的路径积分量子化方法
  - 粒子传播与转移概率幅
  - 费曼图
  - S矩阵
  - 复数时间中的路径积分

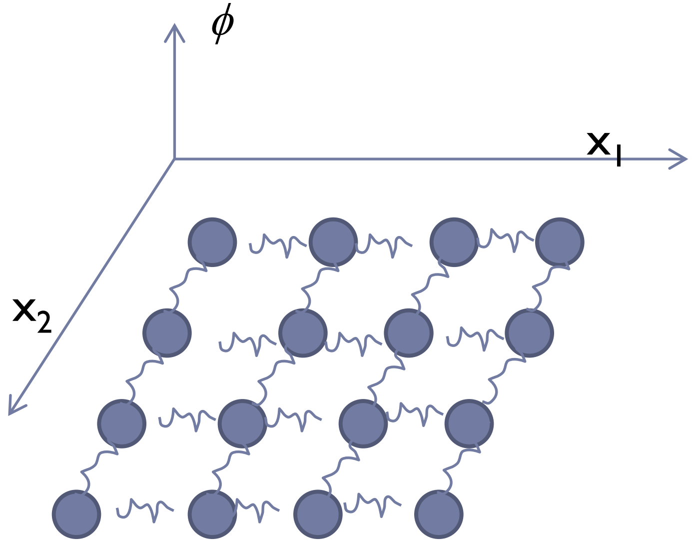
量子场论如何工作？



场：
Φ(x,t)
制约场Φ的方程
场的Lagrangian
场的Hamiltonian
量子化
正则量子化
路径积分量子化
粒子解释

Klein Gordon实标量场

还是从弹簧谐振子谈起



- 考虑左图的弹簧谐振子系统
- 尝试写出该系统的Lagrangian

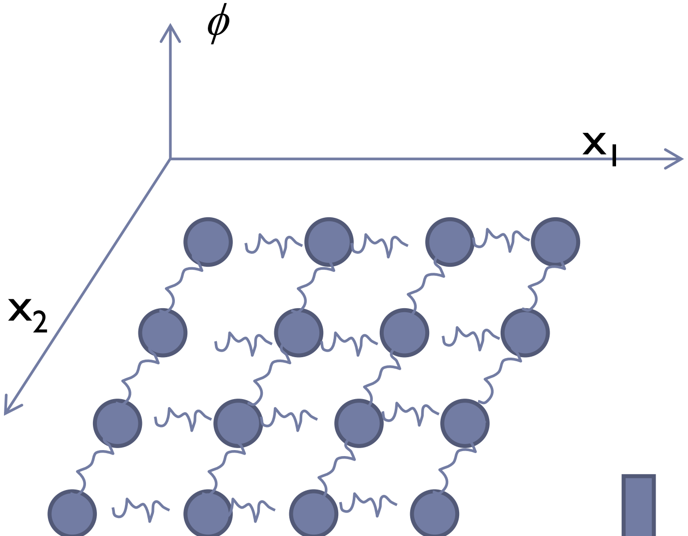
$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}r\dot{\phi}_i^{\,2}-V(\cdots,\phi_i,\cdots,\phi_j,\cdots)$$

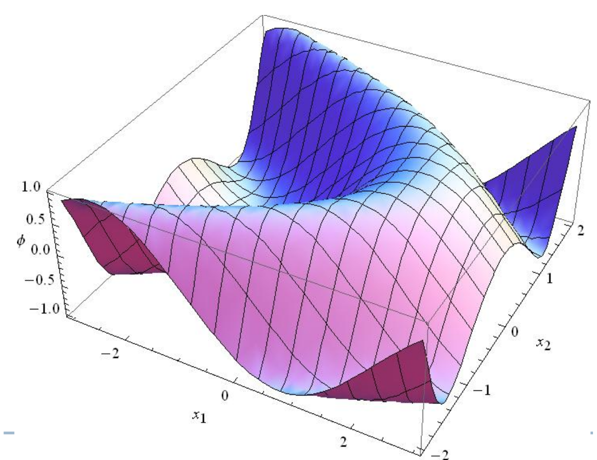
$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}r\dot{\phi}_i^{\,2}+V(\cdots,\phi_i,\cdots,\phi_j,\cdots)$$

假设势能可以写成如下形式：

$$V=\sum_{ij}\frac{1}{2}k\phi_i\phi_j+\cdots\cong\sum_{ij}\frac{1}{2}k\left((\phi_i-\phi_j)^2-\phi_i^{\,2}-\phi_j^{\,2}\right)$$

从多粒子过渡到场





相应的拉格朗日过渡成

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}r\dot{\phi}_i^{\,2}-V(\cdots,\phi_i,\cdots,\phi_j,\cdots)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}r\dot{\phi}_i^{\,2}-\sum_{ij}\frac{1}{2}k\left((\phi_i-\phi_j)^2-\phi_i^{\,2}-\phi_j^{\,2}\right)$$

$$\phi_i-\phi_j\to l\,\frac{\partial\phi}{\partial x_k}$$

$$L(\phi,\partial_k\phi)=\int\frac{1}{2}\left(\sigma\left(\frac{\partial\phi}{\partial t^2}\right)^2-\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial y^2}\right)^2-\tau\phi^2\right)dxdy$$

$$=\int\frac{1}{2}\left(\sigma\partial^k\phi\partial_k\phi-\tau\phi^2\right)dxdy$$

$\sigma=r/l^2,\rho,\tau$由k和l决定。

$$\partial^k=\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right),\partial_k=\left(\frac{\partial}{\partial t},-\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$k=0,1,2$分别表示时间、空间

欧拉拉格朗日方程与Klein Gordon方程

- 由最小作用量原理

$$\min S = \int L dt$$

- 可以得到欧拉拉格朗日方程

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\phi} - \partial_k\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta(\partial_k\phi)}\right) = 0$$

$$\Lambda(\phi, \partial_k\phi) = \frac{1}{2}\left(\sigma\partial_k\phi\partial^k\phi - \tau\phi^2\right)$$

$$\Rightarrow \partial_k\partial^k\phi + m^2\phi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + m^2\phi = 0$$

$$m^2 = \frac{\tau}{\sigma}$$

Klein Gordon方程

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2$$

$$\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = H^2\psi = \left(m_0^2c^4 + P^2\right)\psi = \left(m_0^2c^4 + h^2\nabla^2\right)\psi$$

$$\left(-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 - \frac{m_0^2c^2}{h^2}\right)\psi = 0$$

Klein Gordon场的动量与Hamiltonian

- 动量

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(\sigma\partial_k\phi\partial^k\phi - \tau\phi^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\dot{\phi}\right)^2 - \left(\nabla\phi\right)^2 - m^2\phi^2\right)$$

$$L = \int \Lambda d\mathbf{x}$$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}(\mathbf{x})} = \pi(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$ 场的共轭动量

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

- Hamiltonian

$$H = \sum\nolimits_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - L = \int (\pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - \Lambda)d\mathbf{x}$$

$$= \int\left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{x=1,2,3}\left(\partial_x\phi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(m\phi\right)^2\right]d\mathbf{x}$$

转换到动量空间

- 动量空间：k空间

$$\phi(\mathbf{k}) = \int \exp(-i\mathbf{kx})\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

$$\pi(\mathbf{k}) = \int \exp(-i\mathbf{kx})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

- 在k空间中的Hamiltonian

$$H = \int \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_k \phi)^2 + \frac{1}{2}(m\phi)^2 \right] d\mathbf{x}$$

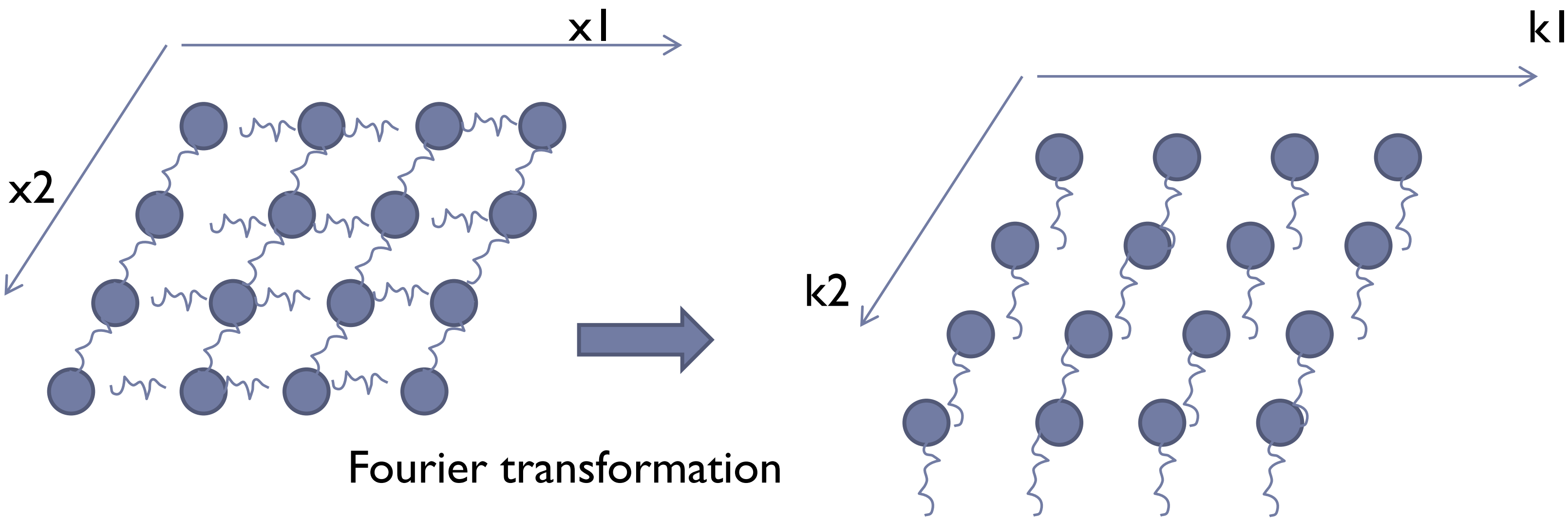
$$= \frac{1}{2}\int \left[(\pi(\mathbf{k}))^2 + \left(\mathbf{k}^2 + m^2\right)(\phi(\mathbf{k}))^2 \right] d\mathbf{k}$$

谐振子的Hamiltonian

考虑到相对论的能量动量关系就是

$$E^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$$

我们干了些什么？



- 在k空间中，我们将这一群弹簧振子解耦了
- 因此，在k空间中，我们就有了一堆互不相关的谐振子

正则量子化Klein Gordon场

什么是正则量子化

- 我们在谐振子的量子化过程中干了什么？
- 将动量p和位置x转化成相应的算符P和X，并赋予如下的对易关系：[X,P]=ih
- 将能量E转化成相应的Hamilton算符
- 求解薛定谔方程
- 可以利用产生湮灭算符简化计算——这不仅仅是简化，还能带来明确的物理意义

定义k空间中的产生湮灭算符

$$H=\frac{1}{2}\int\left[(\pi(\mathbf{k}))^2+(\mathbf{k}^2+m^2)(\phi(\mathbf{k}))^2\right]dk$$

- 针对每个k，都是独立的谐振子，定义：

$$a(\mathbf{k})=\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(\omega_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{k})+i\pi(\mathbf{k})),$$

$$a^+(\mathbf{k})=\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(\omega_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{k})-i\pi(\mathbf{k}))$$

$$where, \omega_{\mathbf{k}}=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$$

对易关系： $[a(\mathbf{k}),a^+(\mathbf{k}')]=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$

- 整个场的Hamiltonian

$$H=\frac{1}{2}\int\omega_{\mathbf{k}}\left(a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k})+\frac{1}{2}\right)d\mathbf{k}$$

- 这样会出现一系列能量本征值和本征态|0>,|1>,…
- 任意一个态都可以写成 $|n_{\mathbf{k}}\rangle=(a^+(\mathbf{k}))^n|0\rangle$

求解Klein Gordon方程

- 可以验证，Klein Gordon方程的解可以写成如下的形式：

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int a(\mathbf{k})e^{-i(\omega_k t-\mathbf{kx})}+a^{+}(\mathbf{k})e^{i(\omega_k t-\mathbf{kx})}d\mathbf{k}$$

- 因此，Φ是一个算符，而不再是波函数
- Φ可以近似看成是在场点x处的产生算符

如何从场解读出粒子

- a+的作用是在k处产生出一个粒子出来，该粒子具备动量k，和能量w_k，并且满足相对论能量-动量关系：

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

- n个粒子的状态

$$|\mathbf{0}\rangle = |000\cdots0\rangle$$

$$|\psi_n\rangle = \left(\prod_{i=1}^{n} a^+(k_i)\right)|\mathbf{0}\rangle$$

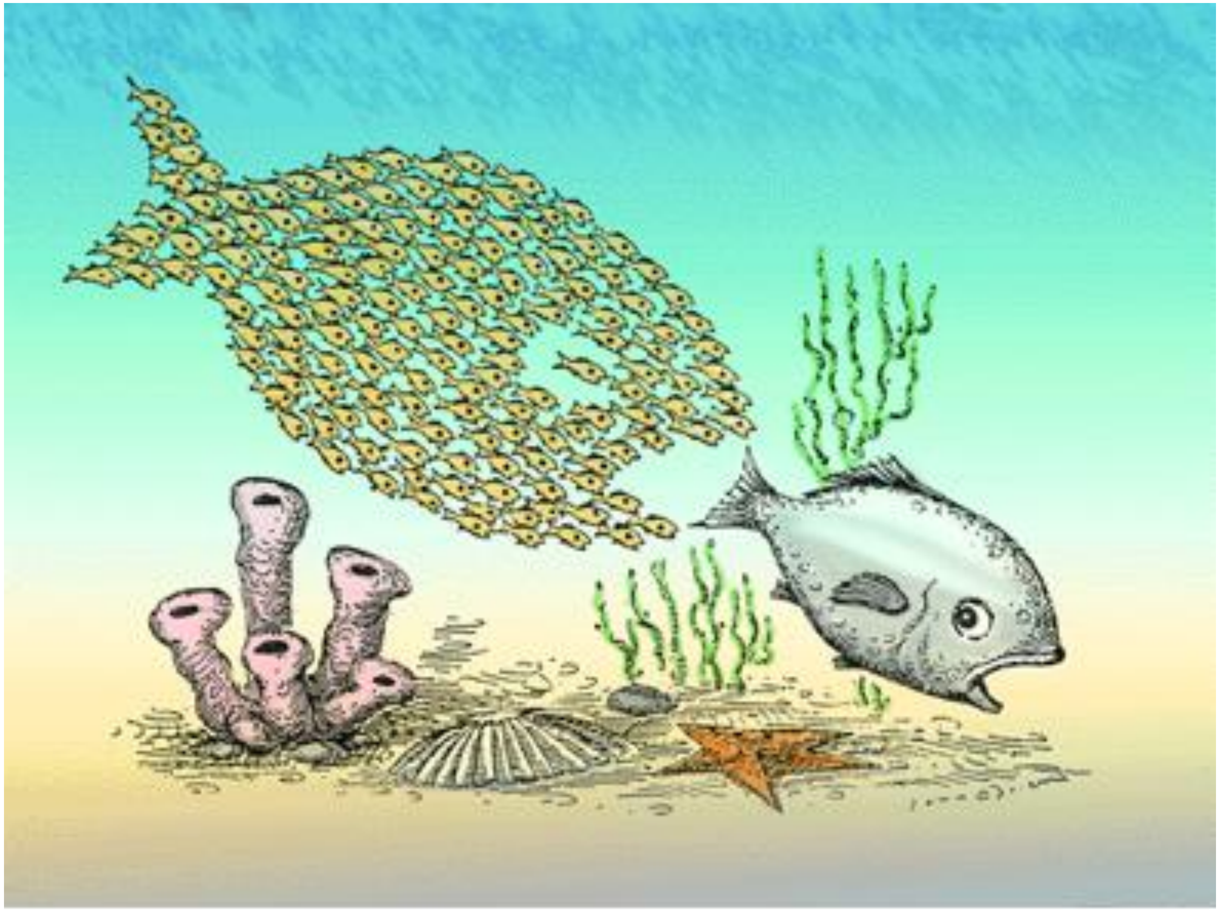
- 可以定义粒子数算符、总能量算符、总动量算符，作用到粒子态$|\psi_n\rangle$上面，测量得到这些物理量
- 粒子的位置波函数为：

$$\Psi(x) = \langle 0|\phi(x)|k\rangle = e^{-ikx}$$

解读Klein Gordon场的两种版本

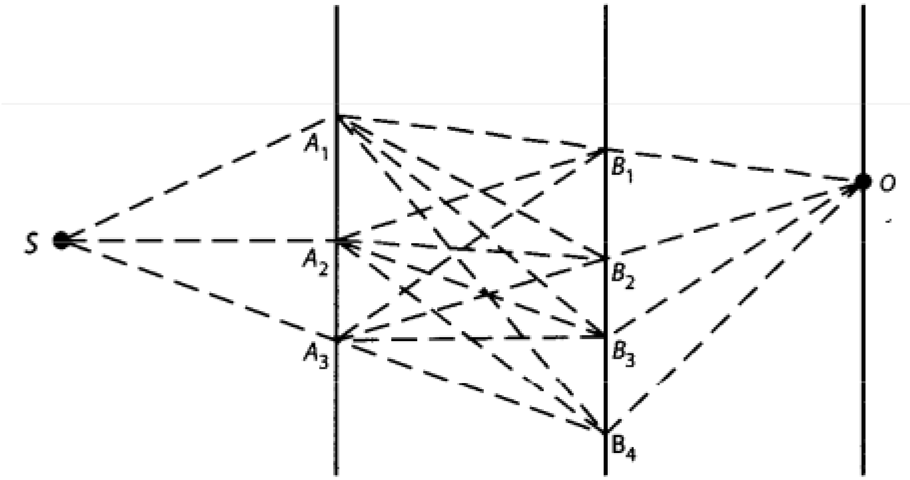
- 我们的做法：
  - 从n个相互耦合的谐振子开始
  - 假设n趋于无穷大，我们得到了Klein Gordon场
  - 一旦有了量子化的Klein Gordon场，早先的谐振子不再是我们研究的对象了。
  - 我们研究的重点变成了该场上面的虚粒子
- 在标准的场论中
  - 给出场的Lagrangian和Hamiltonian
  - 量子化该场，用产生湮灭算符描述
  - 粒子解释→产生粒子
- 在凝聚态物理
  - 固体中的每个原子可以看作是谐振子，这些谐振子可以用量子力学描述
  - 无穷多个谐振子构成了Klein Gordon场，该场显然是量子化的
  - 二次量子化该场，得到了虚粒子
  - 虚粒子：声子

波粒二相性、涌现与量子场论



路径积分量子化Klein Gordon场

从双缝实验谈起



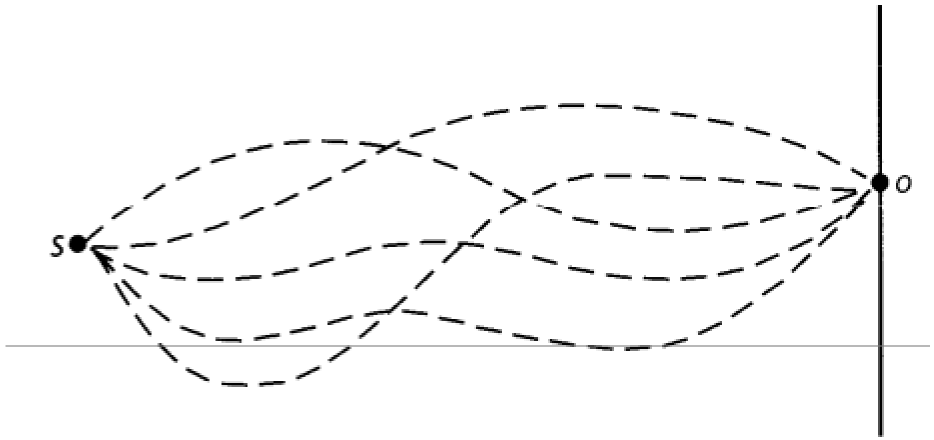
复数概率的马尔科夫准则：

$$\langle O|S\rangle = \left(\sum_i \langle A_i|S\rangle\left(\sum_j \langle B_j|A_i\rangle\right)\right) = \sum_{p\in P}\psi_p$$

$$\psi_p = \prod_t \psi_{p,t}$$

《费曼物理学讲义III》

路径积分

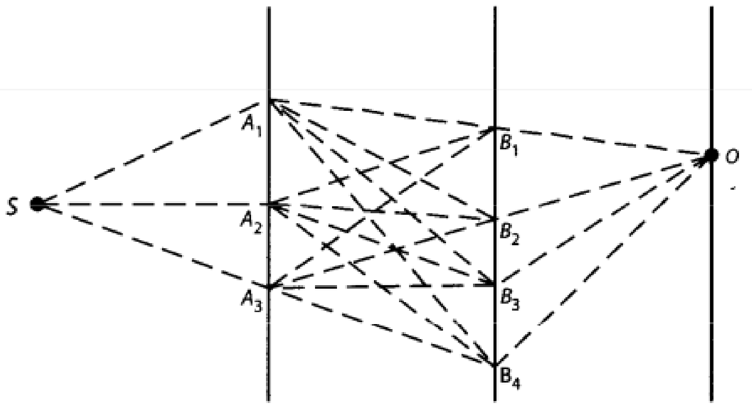


任意状态的概率幅：

$$\mathcal{A}(\text{particle to go from } S \text{ to } O \text{ in time } T) =$$

$$\sum_{\text{(paths)}} \mathcal{A}\left(\text{particle to go from } S \text{ to } O \text{ in time } T \text{ following a particular path}\right)$$

转移概率幅的具体表达



由薛定鄂方程:

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$
$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}$$

那么,到T时刻，粒子在状态q'转移的概率幅:

$$\langle q'|\psi(t)\rangle = \langle q'|e^{-iHt/\hbar}|q\rangle$$

又因为T时间步转移又相当于N次转移的乘积

$$e^{-iHt/\hbar} = e^{-iHN\Delta t/\hbar} = \left(e^{-iH\Delta t/\hbar}\right)^N$$

能量可以拆成动能与势能：H=M(P)+V(Q)

$$e^{-iH\Delta t/\hbar} = e^{-iM(P)\Delta t/\hbar} e^{-iV(Q)\Delta t/\hbar}$$

插入完全基

插入位置特征向量组完全基：

$$\langle q'|\left(e^{-iH\Delta t/h}\right)^N|q\rangle=\langle q'|e^{-iH\Delta t/h}e^{-iH\Delta t/h}\cdots e^{-iH\Delta t/h}|q\rangle$$

$$=\left(\prod_j\int dq_j\right)\langle q'|e^{-iH\Delta t/h}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|e^{-iH\Delta t/h}|q_{N-2}\rangle\cdots\langle q_2|e^{-iH\Delta t/h}|q_1\rangle\langle q_1|e^{-iH\Delta t/h}|q\rangle$$

$$\langle q_{j+1}|e^{-iH\Delta t/h}|q_j\rangle=\langle q_{j+1}|e^{-iT(P)\Delta t/h}e^{-iV(Q)\Delta t/h}|q_j\rangle=e^{-iV(q_i)\Delta t/h}\langle q_{j+1}|e^{-iT(P)\Delta t/h}|q_j\rangle$$

插入动量特征向量组完全基：

$$\langle q_{j+1}|e^{-iT(P)\Delta t/h}|q_j\rangle=\int\frac{dp}{2\pi}\langle q_{j+1}|e^{-iT(P)\Delta t/h}|p\rangle\langle p|q_j\rangle=\int\frac{dp}{2\pi}e^{-iT(p)\Delta t/h}\langle q_{j+1}|p\rangle\langle p|q_j\rangle$$

$$=\int\frac{dp}{2\pi}e^{-iT(p)\Delta t/h}e^{ip(q_{j+1}-q_j)}$$

$$\langle q_{j+1}|e^{-iH\Delta t/h}|q_j\rangle=\int\frac{dp}{2\pi}\exp\left[(-i\Delta t/h)\left(V(q_i)+T(p)-p\frac{q_{j+1}-q_j}{\Delta t}\right)\right]$$

$$\langle q'|\left(e^{-iH\Delta t/h}\right)^N|q\rangle=\left(\prod_j\int dq_j\right)\left(\prod_j\int\frac{1}{2\pi}dp\right)\exp\left[i\int_t dt\left(p\dot{q}-H\right)\right]$$

$$=\left(\int Dq\right)e^{i\int Ldt}$$

$$=\int_\Gamma e^{iS_\Gamma}$$

路径积分简洁而漂亮的公式

$$\langle q' | e^{-iHt/\hbar} | q \rangle = \int_{\Gamma} e^{\frac{i}{\hbar} S(\Gamma)}$$

文字叙述就是：

从任何初态q转移到任意末态q’的概率副为：
沿所有路径对exp(iS)的积分，其中S为依赖于被积分路径的经典作用量

从此经典拉格朗日力学与量子力学之间的联系建立起来了
经典的最小作用量原理可以理解为作用量较大的路径的相位iS相互抵消了，只剩下作用量最小的路径，它的概率幅较大。

传播子

- 下面我们关注一种特定的概率转移振幅

$$\langle 0|\mathrm{T}(\phi(x),\phi(y)|0\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)} \frac{\int D\phi\, \phi(x)\phi(y)\exp\left(i\int_{-T}^{T} d^4x\, L\right)}{Z}$$

$$Z = \int D\phi \exp\left(i\int_{-T}^{T} d^4x\, L\right)$$

它表示从真空态到真空态的量子概率幅，即在真空中粒子在某处产生又在某处湮灭掉的概率幅

T为时间顺序算符，即要求x0>y0

Klein Gordon场的路径积分量子化

- 将Klein Gordon场的Lagrangian代入路径积分

$$L=\int\frac{1}{2}\left(\sigma\partial^k\phi\partial_k\phi-\tau\phi^2\right)d^3x$$

- 得到

$$\langle 0|\mathrm{T}(\phi(x),\phi(y)|0\rangle=\lim_{T\to\infty(1-i\varepsilon)}\frac{\int D\phi\,\phi(x)\phi(y)\exp\left(i\int_{-T}^{T}d^4x\,\frac{1}{2}\left(\sigma\partial^k\phi\partial_k\phi-\tau\phi^2\right)\right)}{Z}$$

$$Z=\int D\phi\exp\left(i\int_{-T}^{T}d^4x\,\frac{1}{2}\left(\sigma\partial^k\phi\partial_k\phi-\tau\phi^2\right)\right)$$

- 利用高斯积分的性质，这个积分可以积出来

$$\langle 0|\mathrm{T}(\phi(x),\phi(y)|0\rangle\equiv D(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ik(x-y)}}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$D(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2-m^2+i\varepsilon}$$ 为费曼传播子

微扰理论与费曼图

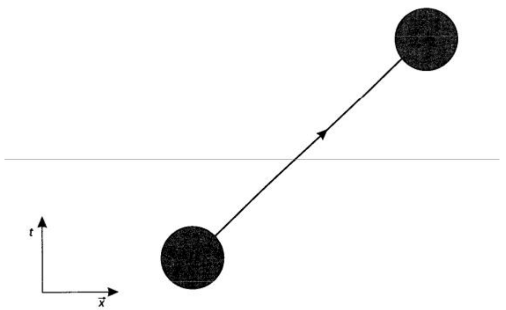
- 源激发

真空激发项

$$Z=\int D\varphi e^{i\int d^4x\{\frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2-m^2\varphi^2]+J\varphi\}}$$

$$Z(J)\equiv Z(J=0)e^{iW(J)}$$

$$W(J)=-\frac{1}{2}\iint d^4x d^4y J(x)D(x-y)J(y)$$



- ϕ^4 理论

$$Z(J)=\int D\varphi\, e^{i\int d^4x\{\frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2-m^2\varphi^2]-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4+J\varphi\}}$$

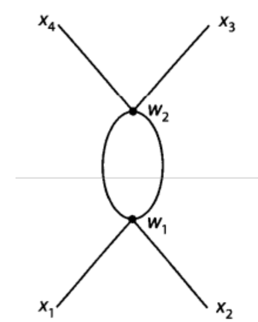
$$Z(J)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}J_{i_1}\cdots J_{i_s}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_l dq_l\right)e^{-\frac{1}{2}q\cdot A\cdot q-(\lambda/4!)q^4}q_{i_1}\cdots q_{i_s}$$

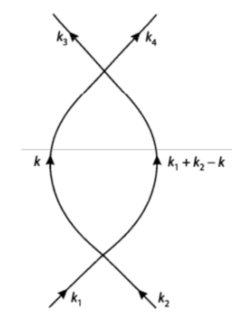
$$=Z(0,0)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}J_{i_1}\cdots J_{i_s}G^{(s)}_{i_1\cdots i_s}$$

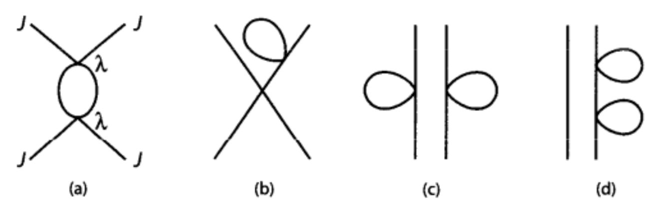
$$G^{(4)}_{ijkl}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_m dq_m\right)e^{-\frac{1}{2}q\cdot A\cdot q}q_iq_jq_kq_l\left[1-\frac{\lambda}{4!}\sum_n q_n^4+O(\lambda^2)\right]/Z(0,0)$$

$$=(A^{-1})_{ij}(A^{-1})_{kl}+(A^{-1})_{ik}(A^{-1})_{jl}+(A^{-1})_{il}(A^{-1})_{jk}$$

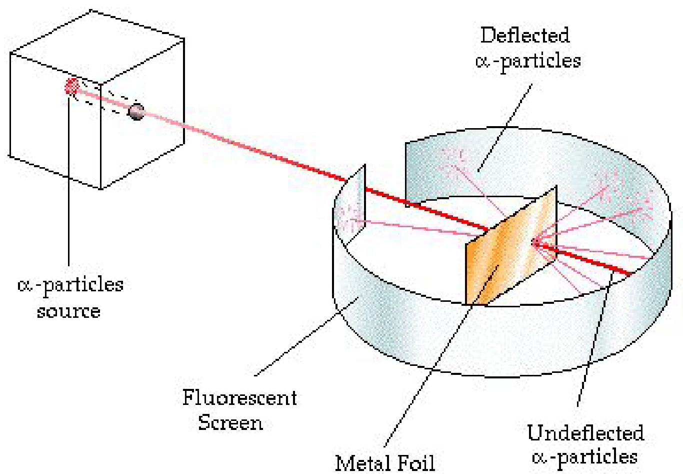
$$-\lambda\sum_n(A^{-1})_{in}(A^{-1})_{jn}(A^{-1})_{kn}(A^{-1})_{ln}+O(\lambda^2) \qquad (10)$$







散射实验与S矩阵



$$\langle k_1,\ldots,k_{N_{\rm out}};{\rm out}|\, l_1,\ldots l_{N_{\rm in}};{\rm in}\rangle = \tilde{Z}_\phi^{\frac{N_{\rm in}+N_{\rm out}}{2}} \left.\frac{\tilde{G}\left(k_1,\ldots,k_{N_{\rm out}};l_1,\ldots l_{N_{\rm in}}\right)}{\left(\prod_i \tilde{G}(k_i)\right)\left(\prod_j \tilde{G}(l_j)\right)}\right|_{\substack{k_i^2\to m_{phys}^2\\ l_j^2\to m_{phys}^2}}$$

$$G(x_1,x_2,\ldots,x_N)\equiv\langle\Omega|\,T\left\{\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_N)\right\}|\Omega\rangle$$

为N点传播子

Wick旋转与统计物理

- 在其中，Z实际上等于：

$$Z \equiv \langle 0|e^{-iHt/h}|0\rangle = \int D\phi \exp\left(\frac{i}{h}\int_{-T}^{T} d^4x\, L\right)$$

- 之所以选取字母Z是因为为了与统计物理中的配分函数相一致，作wick旋转：t→-it，则Z就转变为配分函数

$$Z = \int D\phi\, e^{\frac{i}{h}\int_{t=0}^{T} dt\left(\frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 - V\right)} \xrightarrow{t\to -it} Z = \int D\phi\, e^{-\frac{1}{h}\int_{t=0}^{T} d\tau\left(\frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 + V\right)}$$

- 这个转换的几点对应：

$$t \to i\tau$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial t} \to -i\frac{\partial\phi}{\partial\tau}$$
$$\hbar \to k\kappa$$

Minkowski空间→欧几里得时空

总结

- 实现量子场论的两条路
  - 正则量子化
  - 路径积分量子化
- 关于波粒二象性与涌现
  - “虚粒子”就是实粒子
  - 可以计算虚粒子的各种物理量
- Wick旋转与虚时间