量子纠缠与贝尔不等式

Jake
集智俱乐部“量子决策理论读书会”
2012-1-8

联合概率分布、纠缠态

经典联合概率

- 经典硬币

A\B	0	1
0	1/3	1/3
1	1/6	1/6

- 该表就是一个经典联合概率分布，表示Pr{A=i & B= j}
- Pr{A=i}=Pr{A=i & B=0}+Pr{A=i & B=1}
- Pr{B=i}=Pr{A=0 & B=i}+Pr{A=1 & B=i}
- 上式i=0或1

经典独立事件

- 如果两个事件X,Y相互独立，则：Pr{X&Y}=Pr{X}*Pr{Y}

A\B	0	1	Pr(B)
0	2/9	4/9	2/3
1	1/9	2/9	1/3
Pr(B)	1/3	2/3	

- 因此， Pr(A&B)=Pr(A)*Pr(B),A与B独立。
- 如果Pr{X&Y}<>Pr{X}*Pr{Y}，则说X,Y有关联。

向量表示

- A={0,1}可以用向量表示为：
- P(A)=p(0)|0>+p(1)|1>
- P(B)=p(0)|0>+p(1)|1>
- 那么联合概率分布表示为向量：
- P(A&B)=p(0,0)|00>+p(0,1)|01>+p(1,0)|10>+p(1,1)|11>
- 如果A,B相互独立，则

$$P(A\&B)=p_A(0)p_B(0)\left|00\right\rangle+p_A(0)p_B(1)\left|01\right\rangle$$
$$+p_A(1)p_B(0)\left|10\right\rangle+p_A(1)p_B(1)\left|11\right\rangle$$

向量的直积

- |X>=x1 |0> + x2 |1>
- |Y>=y1 |0> + y2 |1>
- 则这两个向量的直积为：

$$|X\rangle\times|Y\rangle = x_1y_1|0\rangle\times|0\rangle + x_1y_2|0\rangle\times|1\rangle + x_2y_1|1\rangle\times|0\rangle + x_2y_2|1\rangle\times|1\rangle$$

- 定义 $|ij\rangle = |i\rangle\times|j\rangle$

$$|X\rangle\times|Y\rangle = x_1y_1|00\rangle + x_1y_2|01\rangle + x_2y_1|10\rangle + x_2y_2|11\rangle$$

独立事件的概率

$$
\begin{aligned}
P(A\&B) &= p_A(0)p_B(0)|00\rangle + p_A(0)p_B(1)|01\rangle \\
&\quad + p_A(1)p_B(0)|10\rangle + p_A(1)p_B(1)|11\rangle \\
&= (p_A(0)|0\rangle + p_A(1)|1\rangle)\times(p_B(0)|0\rangle + p_B(1)|1\rangle) \\
&= P(A)\times P(B)
\end{aligned}
$$

- 采用向量记法，独立事件的分布向量就是两个事件分布向量的直积

量子联合概率——复数概率

- 量子硬币

A\B	0	1
0	1/2(CosPi+iSinPi)	3/4(CosPi/3+iSinPi/3)
1	Sqrt(5)/4	1/2

- 该表就是一个量子联合概率分布，满足模方和等于1.
- 它可以写成向量的形式

$$\psi(A\&B)=\psi_A(0)\psi_B(0)|00\rangle+\psi_A(0)\psi_B(1)|01\rangle$$
$$+\psi_A(1)\psi_B(0)|10\rangle+\psi_A(1)\psi_B(1)|11\rangle$$

相互独立的事件

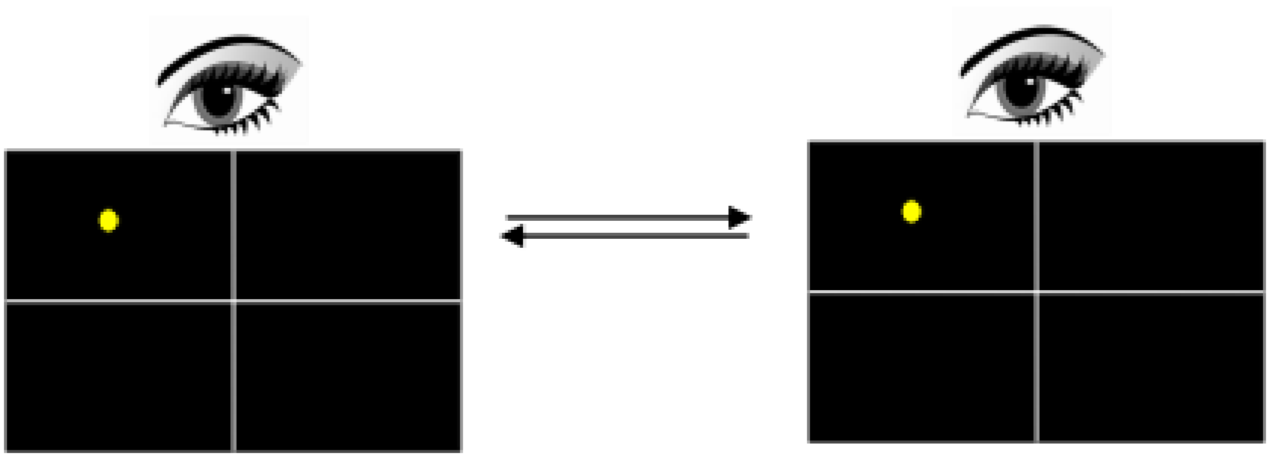
- 如果两事件的联合量子概率可以写成：

$$\psi(A\&B)=\psi(A)\times\psi(B)$$

- 那么，A,B相互独立。
- 如果某个联合概率向量ψ不能写成两个向量的直积的形式，则称ψ为纠缠态。
- 例如：

$$\psi(A\&B)=x|00\rangle+y|11\rangle$$

纠缠态举例



两个盒子，两只孪生萤火虫发生了量子纠缠，则：

$$\psi(A\&B)=\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

小结

- 所谓的纠缠态就是一类特殊的联合分布
- 纠缠态不能写成两状态向量直积的状态
- 经典概率中也存在着纠缠态

- 注意，不独立的两个事件不一定处于纠缠态。
- 思考纠缠态和非纠缠态哪个更多

一个不独立但是也不纠缠的例子：

A\B	0	1	P(B)
0	1/2	1/4	3/4
1	1/8	1/8	1/4
P(A)	5/8	3/8	

贝尔不等式

背景

- 贝尔不等式并不是量子世界的法则
- 它是经典概率必须满足的铁律
- 但是，却被量子概率打破
- 处于量子纠缠状态的系统可以打破贝尔不等式

2个事件的关联

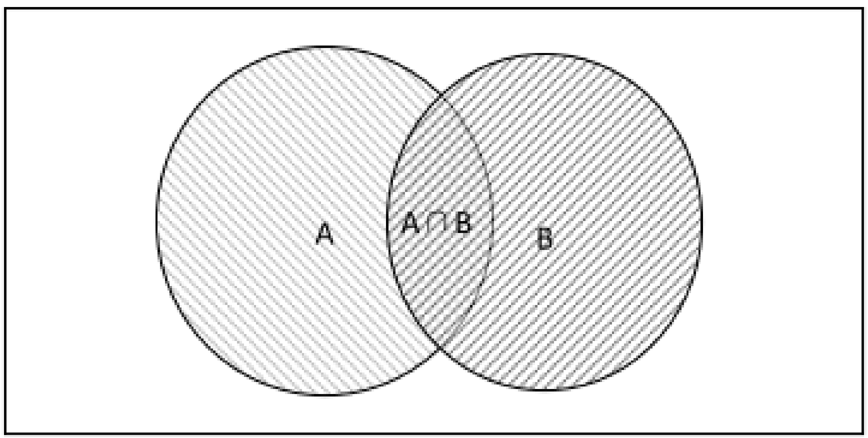
- 考虑一个缸子中充满了球。
  - 每个球可能是红绿两种颜色(A)
  - 可能是木、钢两种材质(B)
- 两个属性、三个事件
  - P(A), P(B), P(A&B)
- 我们知道P(X)必须在[0,1]区间内
- 是否满足这个要求的所有[0,1]区间内的数都可以赋给P(A),P(B),P(A&B)吗？
- 考虑这样的事件是否可能？
  - P(A)=0.3, P(B)=0.8, P(A&B)=0.02

2个事件的关联

- 任意三个数p(A),p(B),p(A&B)要想成为事件的概率必须满足如下不等式

$$p(A)+p(B)-p(A\&B)\in[0,1]$$

$$\because\ p(A)+p(B)-p(A\&B)=p(A\vee B)\in[0,1]$$



关联多边形

所有可能的三个数组合p(A),p(B),p(A&B)都在这个多边形内部

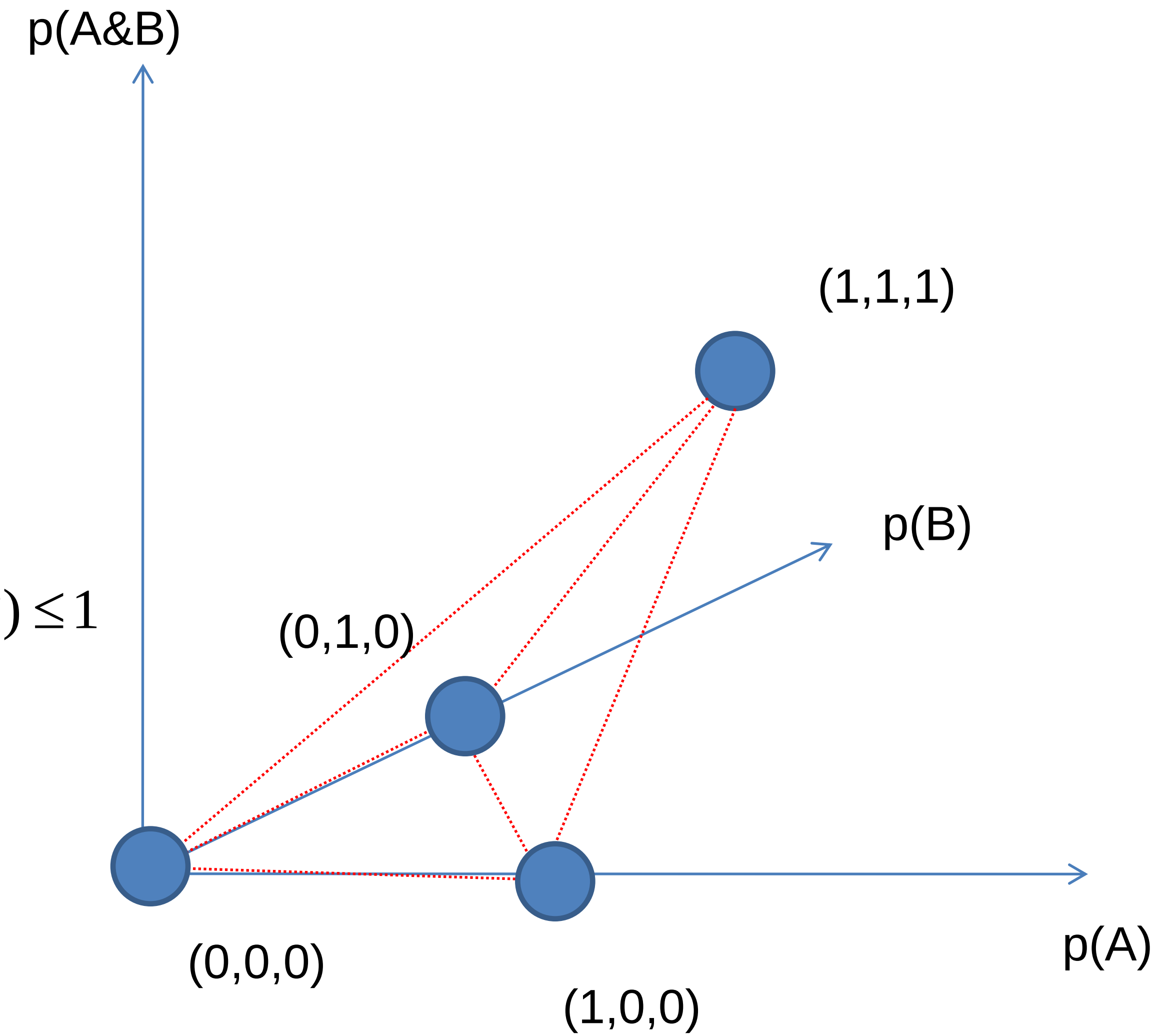
全部的不等式约束：

$$0 \le p(A), p(B) \le 1$$

$$0 \le p(A\&B) \le p(A)$$

$$0 \le p(A\&B) \le p(B)$$

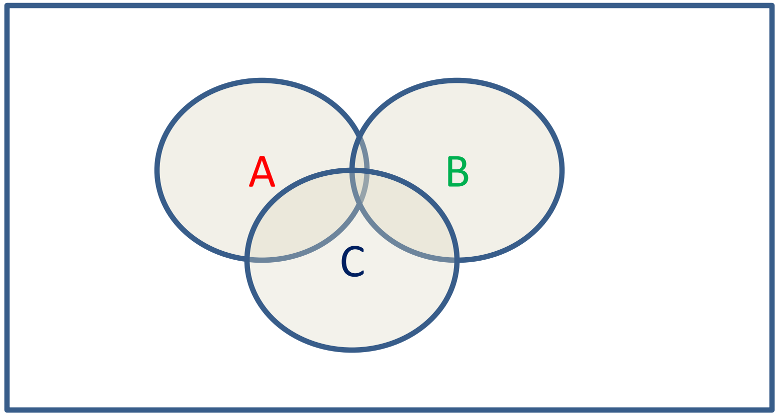
$$0 \le p(A) + p(B) - p(A\&B) \le 1$$



3个事件的关联多边形

- 类似地，对于三个事件A,B,C，p(A),p(B),p(C),p(A&B),p(B&C),p(A&C)需要满足：

$$0 \le p(i \,\&\, j) \le p(i) \le 1$$
$$0 \le p(i) + p(j) - p(i \,\&\, j) \le 1$$
$$0 \le p(A) + p(B) + p(C) - \sum_{i,j} p(i \,\&\, j) \le 1$$
$$p(A) - p(A \,\&\, B) - p(A \,\&\, C) + p(B \,\&\, C) \ge 0$$
$$p(B) - p(A \,\&\, B) - p(B \,\&\, C) + p(A \,\&\, C) \ge 0$$
$$p(C) - p(A \,\&\, C) - p(B \,\&\, C) + p(A \,\&\, B) \ge 0$$



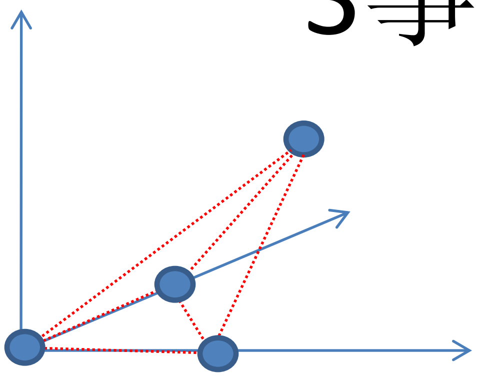
3事件的关联多边形

主观概率	A	B	C	A&B	B&C	A&C
λ1	0	0	0	0	0	0
λ2	0	0	1	0	0	0
λ_3	0	1	0	0	0	0
λ_4	1	0	0	0	0	0
λ_5	0	1	1	0	1	0
λ_6	1	0	1	0	0	1
λ_7	1	1	0	1	0	0
λ_8	1	1	1	1	1	1

λ1~8分别对应这8种可能性的概率，表中的每一行刚好是一个6维 空间中的坐标，并且对应了关联多边形的一个顶点

$\lambda1+\lambda2+\cdots+\lambda8=1$

3事件的关联多边形



关联多边形之内的任意一点可以写成顶点的凸组合

$$V=\sum_i \lambda_i e_i$$
$$=\lambda_1(0,0,0,0,0,0)+\lambda_2(0,0,1,0,0,0)+\lambda_3(0,1,0,0,0,0)+\lambda_4(1,0,0,0,0,0)$$
$$+\lambda_5(0,1,1,0,1,0)+\lambda_6(1,0,1,0,0,1)+\lambda_7(1,1,0,1,0,0)+\lambda_8(1,1,1,1,1,1)$$
$$=(\lambda_4+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8,\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7+\lambda_8,\lambda_2+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_8,\lambda_7+\lambda_8,\lambda_5+\lambda_8,\lambda_6+\lambda_8)$$

恰好，每个多边形内的点V的坐标是

$$V=(p(A),p(B),p(C),p(A\&B),p(B\&C),p(A\&C))$$
$$\therefore (p(A),p(B),p(C),p(A\&B),p(B\&C),p(A\&C))=$$
$$(\lambda_4+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8,\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7+\lambda_8,\lambda_2+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_8,\lambda_7+\lambda_8,\lambda_5+\lambda_8,\lambda_6+\lambda_8)$$

λ与p的关系

$$V=(p(A),p(B),p(C),p(A\&B),p(B\&C),p(A\&C))$$

$$\therefore (p(A),p(B),p(C),p(A\&B),p(B\&C),p(A\&C))=$$

$$(\lambda_4+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8,\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7+\lambda_8,\lambda_2+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_8,\lambda_7+\lambda_8,\lambda_5+\lambda_8,\lambda_6+\lambda_8)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(A)=\lambda_4+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8 \\ p(B)=\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7+\lambda_8 \\ p(C)=\lambda_2+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_8 \\ \quad p(A\&B)=\lambda_7+\lambda_8 \\ \quad p(B\&C)=\lambda_5+\lambda_8 \\ \quad p(A\&C)=\lambda_6+\lambda_8 \\ 1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8 \end{cases}$$

解出λi，注意有一个自由参数λ8

得到广义的Pitowsky不等式

$$
\begin{cases}
\lambda_4 - \lambda_8 = p(A) - p(A\&B) - p(A\&C) \\
\lambda_3 - \lambda_8 = p(B) - p(A\&B) - p(B\&C) \\
\lambda_2 - \lambda_8 = p(C) - p(A\&C) - p(B\&C) \\
\lambda_7 + \lambda_8 = p(A\&B) \\
\lambda_5 + \lambda_8 = p(B\&C) \\
\lambda_6 + \lambda_8 = p(A\&C) \\
\lambda_1 + \lambda_8 = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(BC) - p(AC)
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\lambda_4 + \lambda_5 = p(A) - p(A\&B) - p(A\&C) + p(B\&C) \in [0,1] \\
\lambda_3 + \lambda_6 = p(B) - p(A\&B) - p(B\&C) + p(A\&C) \in [0,1] \\
\lambda_2 + \lambda_7 = p(C) - p(A\&C) - p(B\&C) + p(A\&B) \in [0,1] \\
\lambda_7 + \lambda_8 = p(A\&B) \in [0,1] \\
\lambda_5 + \lambda_8 = p(B\&C) \in [0,1] \\
\lambda_6 + \lambda_8 = p(A\&C) \in [0,1] \\
\lambda_1 + \lambda_8 = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(BC) - p(AC) \in [0,1]
\end{cases}
$$

最原始的贝尔不等式

- 1+C(b,c)>=|C(a,b)-C(a,c)|
- 其中， C(x,y)=E(xy), a,b,c = -1,1

$$C(x,y)=(-1)(-1)p_{xy}(-1,-1)+(-1)(1)p_{xy}(-1,1)+(1)(-1)p_{xy}(1,-1)+(1)(1)p_{xy}(1,1)$$
$$=p_{xy}(-1,-1)+p_{xy}(1,1)-p_{xy}(-1,1)-p_{xy}(1,-1)$$
$$=1-2(p_{xy}(-1,1)+p_{xy}(1,-1))=1-2p_{xy}(d)$$
$$p_{xy}(d)\equiv p_{xy}(-1,1)+p_{xy}(1,-1)$$
$$\therefore C(a,b)-C(a,c)=2(p_{ac}(d)-p_{ab}(d))$$
$$1+C(b,c)=2-2p_{bc}(d)$$
$$1+C(b,c)\leq|C(a,b)-C(a,c)|$$
$$\Leftrightarrow p_{bc}(d)-1\leq p_{ac}(d)-p_{ab}(d)\leq 1-p_{bc}(d)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq p_{ac}(d)-p_{ab}(d)-p_{bc}(d)\\-1\leq -p_{ac}(d)+p_{ab}(d)-p_{bc}(d)\end{cases}$$
$$\Leftarrow\begin{cases}p(B)-p(A\&B)-p(B\&C)+p(A\&C)\geq 0\\p(C)-p(A\&C)-p(B\&C)+p(A\&B)\geq 0\end{cases}$$

变体：实验验证的CHSH不等式

$$C(A,B)-C(A,B')+C(A',B)+C(A',B')\leq 2$$

$$C(X,Y)=E(XY)$$

$$X,Y=+1,-1$$

该不等式是如下4个事件的广义贝尔不等式的变体：

$$-1\leq p_{14}-p_{13}+p_{23}+p_{24}-p_2-p_4\leq 0$$

导出CHSH不等式

因为A,B,A’,B’=+1或者-1，只考虑A,B：相异,AA’,BB’相同的事件，即A,A’=+1,B,B’=-1或者A,A’=-1,B,B’=+1，可以得到两个广义贝尔不等式

$$-1 \le p_{AB}(+1,-1) - p_{AB'}(+1,-1) + p_{A'B'}(+1,-1) + p_{A'B}(+1,-1) - p_{A'}(+1) - p_B(-1) \le 0$$

$$-1 \le p_{AB}(-1,+1) - p_{AB'}(-1,+1) + p_{A'B'}(-1,+1) + p_{A'B}(-1,+1) - p_{A'}(-1) - p_B(+1) \le 0$$

两式相加，并注意到$p_{A'}(+1) + p_{A'}(-1) = p_B(+1) + p_B(-1) = 1$，有：

$$-2 \le p_{AB}(d) - p_{AB'}(d) + p_{A'B'}(d) + p_{A'B}(d) - 1 - 1 \le 0,$$ 其中，$p_{xy}(d) = p_{xy}(+1,-1) + p_{xy}(-1,+1)$

$$\therefore 0 \le p_{AB}(d) - p_{AB'}(d) + p_{A'B'}(d) + p_{A'B}(d) \le 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 2p_{AB}(d) - 2p_{AB'}(d) + 2p_{A'B'}(d) + 2p_{A'B}(d) \le 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \le p_{AB}(d) + 1 - p_{AB}(s) - p_{AB'}(d) - 1 + p_{AB'}(s) + p_{A'B'}(s) + 1 - p_{A'B'}(s) + p_{A'B}(s) + 1 - p_{A'B}(s) \le 4$$

其中$p_{xy}(s) = p_{xy}(+1,+1) + p_{xy}(-1,-1)$

$$\Leftrightarrow 0 \le p_{AB}(d) - p_{AB}(s) - p_{AB'}(d) + p_{AB'}(s) + p_{A'B'}(s) - p_{A'B'}(s) + p_{A'B}(s) - p_{A'B}(s) + 2 \le 4$$

注意到$C(X,Y) = (+1)(+1)p_{XY}(+1,+1) + (+1)(-1)p_{XY}(+1,-1) + (-1)(+1)p_{XY}(-1,+1) + (-1)(-1)p_{XY}(-1,-1)$

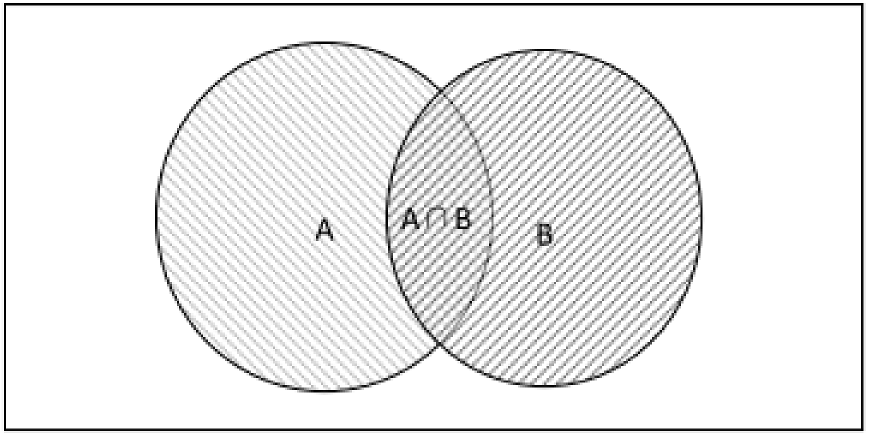
$$= p_{XY}(s) - p_{XY}(d)$$

$$\therefore \Leftrightarrow -2 \le -C(A,B) + C(A,B') - C(A',B') - C(A',B) \le 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \le C(A,B) - C(A,B') + C(A',B') + C(A',B) \le 2$$

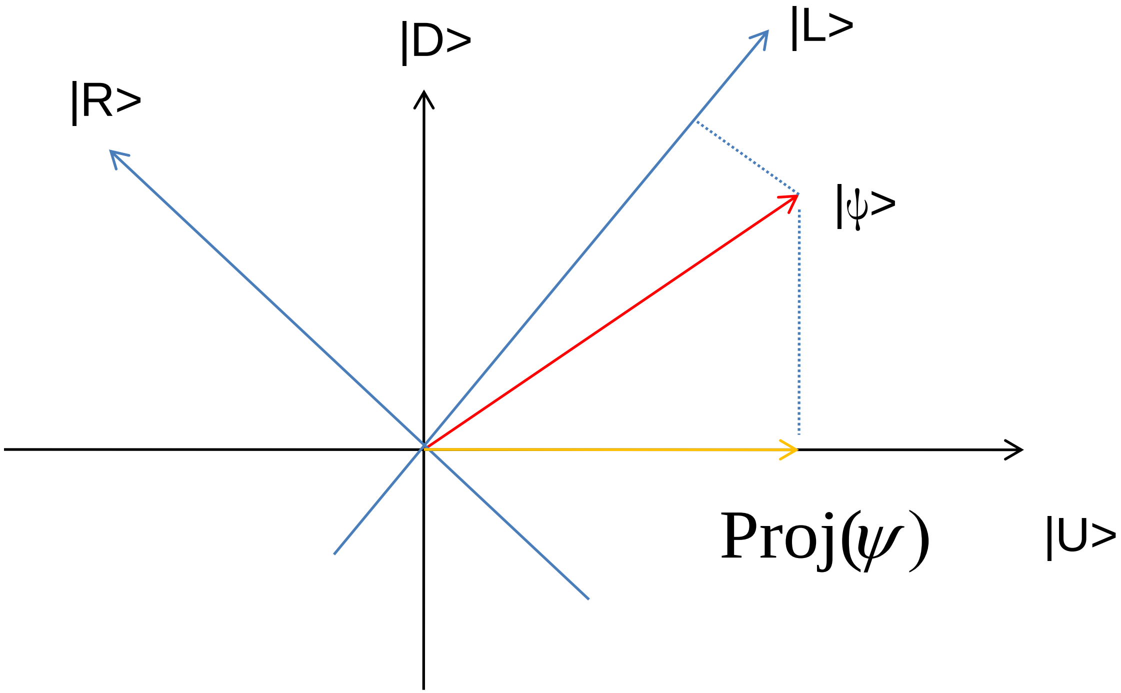
最简形式：GHZ不等式

$$p(A)+p(B)-p(A\&B)\in[0,1]$$



预备：投影矩阵

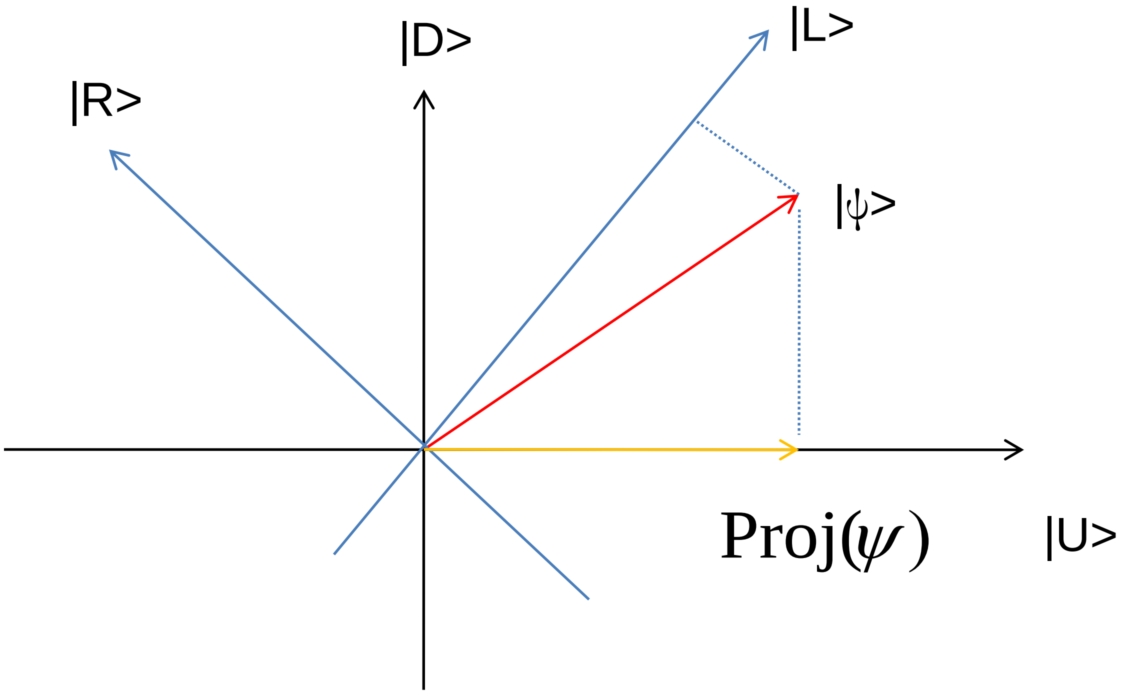
测量与投影



某事件的概率就是在该事件对应坐标轴上的投影向量的长度平方

$$\Pr\{U\} = |\operatorname{Proj}(\psi)|^2$$

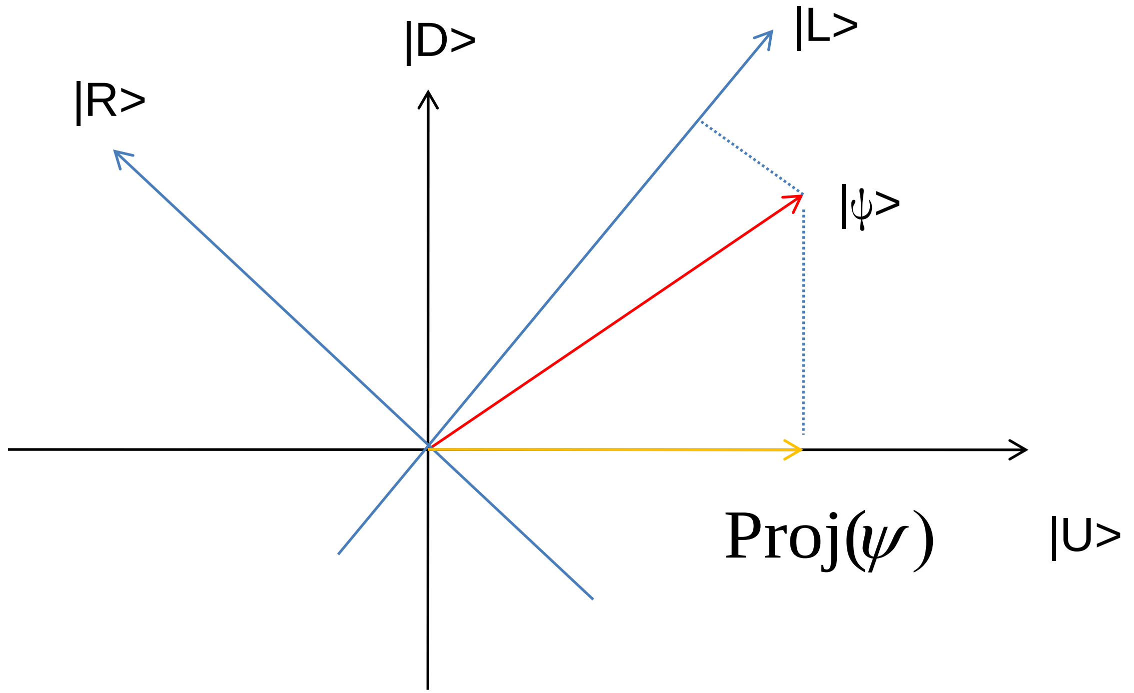
投影矩阵



运算Proj可以表示成一个矩阵，使得：

$$\mathrm{Proj}(\psi) = M(|Z\rangle)\psi$$

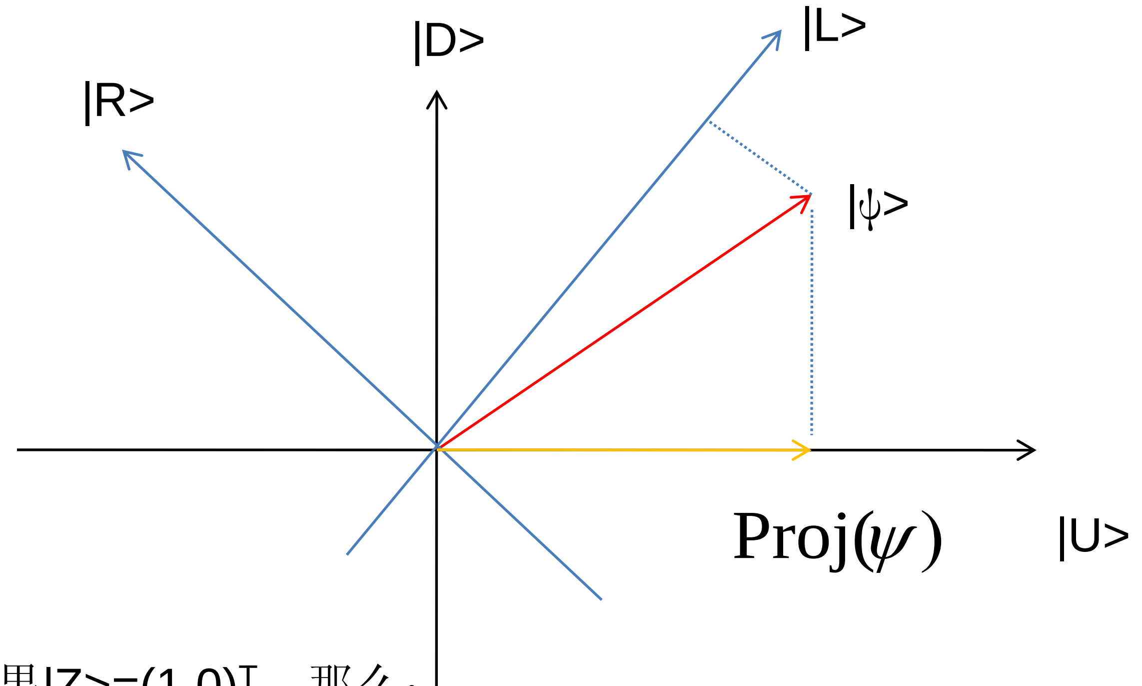
投影矩阵



如果|Z>=(x,y)^T，那么：

$$M(|Z\rangle)=|Z\rangle^{\perp}\times|Z\rangle=(x^*,y^*)\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xx^* & xy^*\\yx^* & yy^*\end{pmatrix}$$

投影矩阵

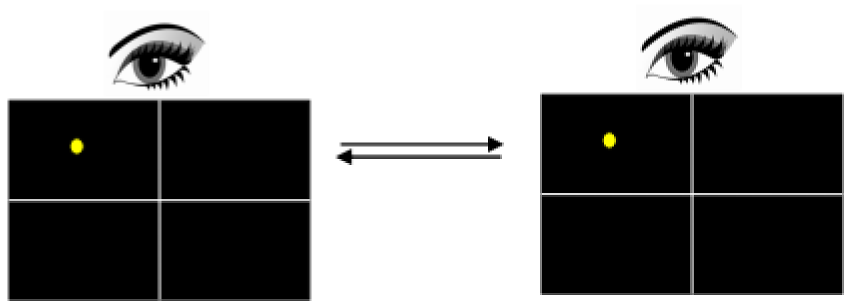


验证一下，如果|Z>=(1,0)^T，那么：

$$M(|Z\rangle) = |Z\rangle^{\perp} \times |Z\rangle = (x^*, y^*) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(|Z\rangle)|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

投影矩阵的复合



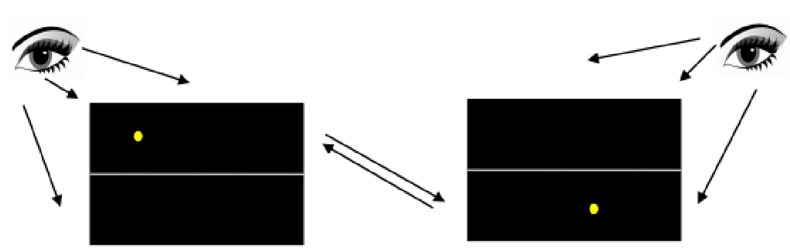
$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$M_1 \otimes M_2 = \begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & b\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ c\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & d\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}$$

量子概率对贝尔不等式的破坏

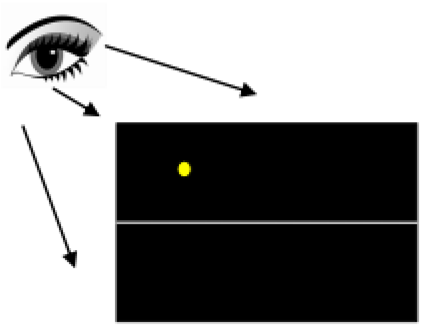
思路：构造两个事件

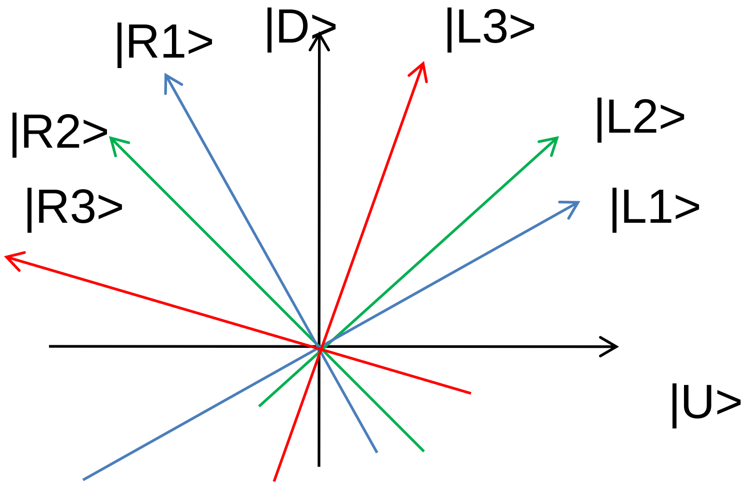
- 找出2个事件A,B,以及A&B
- 使得P(A)+P(B)-P(AB)>1
- 但是对于单个属性无法构造，因为A&B=0
- 所以只能考虑一个复合系统
- 但是，破坏贝尔不等式的例子很难构造
- 例如A=左上，B=右下，A&B=左上右下，不能破坏



思路：构造两个事件

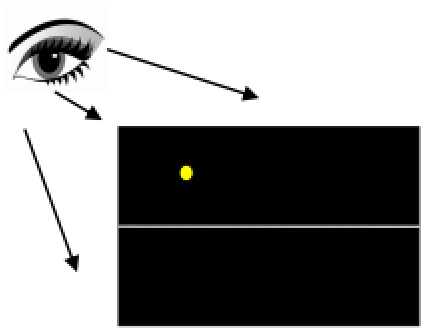
- 所以构造特别的三个基本事件A1,A2,A3：
  - 每个盒子上开了三个孔，分别呈现θ倾角，考察萤火虫的左右





A_i为从第i个孔看萤火虫在左侧

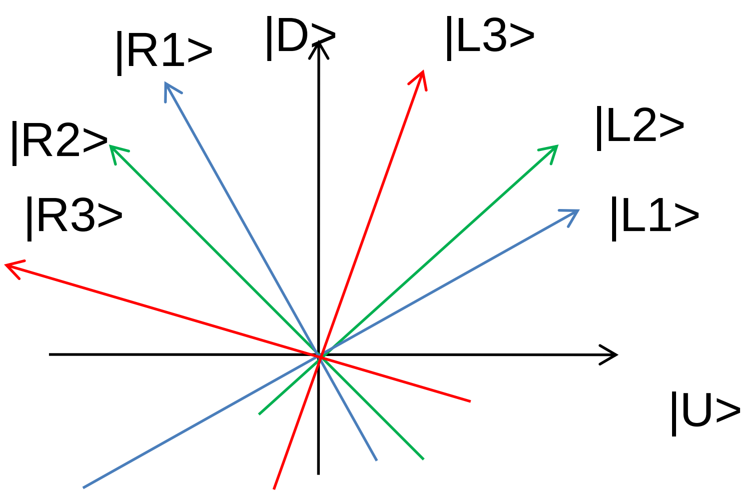
3组不兼容测量



观察者从3个不同角度来观测系统是否处于L或者R

设所有的坐标系横坐标为：

$$\left|L_k\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta_k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta_k} \end{pmatrix}$$



对应的投影矩阵为

$$M_\theta(L) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 1 \end{pmatrix}$$

θ1=0， θ2=Pi/4, θ3=Pi/2

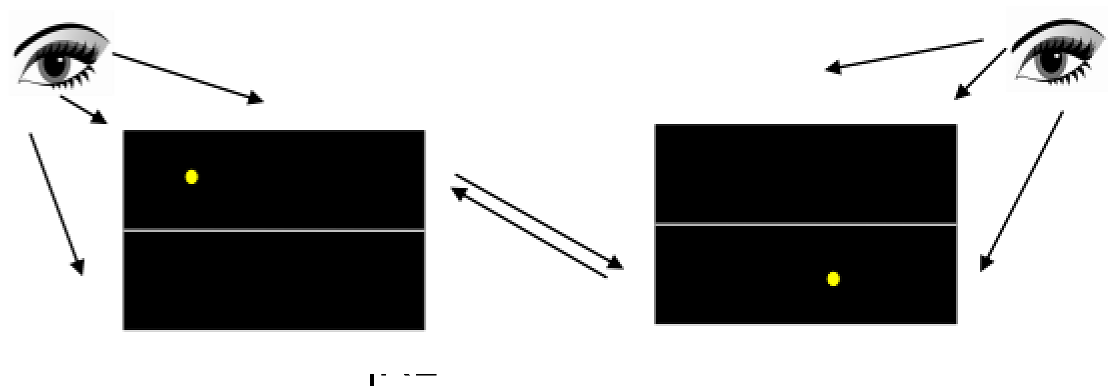
复合三个基本事件

事件A：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第2个孔看它在右侧；
事件B：从第2个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看它在右侧；
事件C：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看它在右侧。

事件A：A1&~A2
事件B：A2&~A3
事件C：A1&~A3

这样，C=A&B=(A1&~A2)&(A2&~A3)=A1&A3

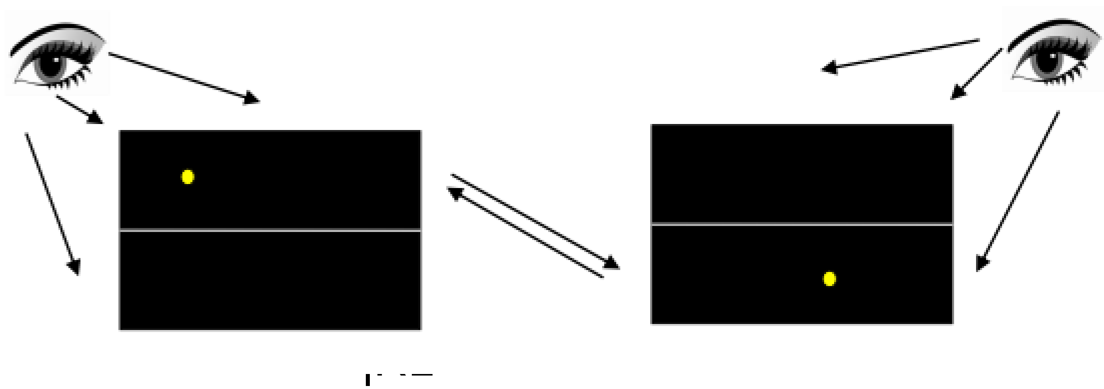
复合两个萤火虫系统



处于纠缠态：

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|UD\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|DU\right\rangle$$

于是三个事件等价于复合系统的三种测量



事件A：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第2个孔看它在右侧；
事件B：从第2个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看它在右侧；
事件C：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看它在右侧。

事件A’：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第2个孔看到右盒的萤火虫在左侧；
事件B”：从第2个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看右盒的萤火虫在左侧；
事件C’：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看右盒的萤火虫在左侧

投影矩阵表示

- 翻译成投影矩阵

事件A’：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第2个孔看到右盒的萤火虫在左侧；
事件B’’：从第2个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看右盒的萤火虫在左侧；
事件C’：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看右盒的萤火虫在左侧

事件A’ $$M_0(L)\otimes M_{\pi/4}(L)$$

事件B’ $$M_{\pi/4}(L)\otimes M_{\pi/2}(L)$$

事件C’ $$M_0(L)\otimes M_{\pi/2}(L)$$

进行计算

- 翻译成投影矩阵

事件A’：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第2个孔看到右盒的萤火虫在左侧；
事件B”：从第2个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看右盒的萤火虫在左侧；
事件C’：从第1个孔看到左盒的萤火虫在左侧，并且从第3个孔看右盒的萤火虫在左侧

事件A’的概率：$|(M_0(L)\otimes M_{\pi/4}(L))\cdot\xi|^2=\left|\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & e^{-i\pi/4} & 1 & e^{-i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & 1 & e^{i\pi/4} & 1 \\ 1 & e^{-i\pi/4} & 1 & e^{-i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & 1 & e^{i\pi/4} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2=\sin^2(\pi/8)/2$

事件B’ $\sin^2(\pi/8)/2$

事件C’ $\sin^2(\pi/4)/2$

破坏贝尔不等式

- 翻译成投影矩阵

$$P(A)+P(B)-P(A\&B)=P(A')+P(B')-P(C')$$
$$=\sin^2(\pi/8)/2+\sin^2(\pi/8)/2-\sin^2(\pi/4)/2\sim -0.103553<0$$

破坏了不等式：

$$P(A)+P(B)-P(A\&B)\geq 0$$

思考

$$P(A)+P(B)-P(A\&B)\geq 0$$

- 如何破坏这个不等式？
- 关键在于A&B的测量和A,B的测量数据再融合不是一回事

破坏贝尔不等式例2

- 考虑给左盒子开两个孔A,A’，右盒子开两个不同的孔B,B’，AA’与BB’没什么关系
- 可以通过精心设计投影矩阵MA,MA’,MB,MB’，从而破坏CHSH不等式：

$$C(A,B)-C(A,B')+C(A',B)+C(A',B')\leq 2$$

或与其等价的概率不等式：

$$-1\leq p_{AB}(+1,-1)-p_{AB'}(+1,-1)+p_{A'B'}(+1,-1)+p_{A'B}(+1,-1)-p_{A'}(+1)-p_{B}(-1)\leq 0$$

破坏贝尔不等式例2

$$M_{A=+1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},M_{A=-1}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$M_{A'=+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},M_{A'=-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$M_{B=+1}=\begin{pmatrix}\frac{2-\sqrt{2}}{4}&-1/(2\sqrt{2})\\-1/(2\sqrt{2})&\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\end{pmatrix},M_{B=-1}=\begin{pmatrix}\frac{2+\sqrt{2}}{4}&1/(2\sqrt{2})\\1/(2\sqrt{2})&\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$M_{B'=+1}=\begin{pmatrix}\frac{2-\sqrt{2}}{4}&1/(2\sqrt{2})\\1/(2\sqrt{2})&\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\end{pmatrix},M_{B'=-1}=\begin{pmatrix}\frac{2+\sqrt{2}}{4}&-1/(2\sqrt{2})\\-1/(2\sqrt{2})&\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

A对应从左侧1孔测量得到+1（左）-1（右）的结果
A’对应从左侧2孔测量得到+1（左）-1（右）的结果
B对应从右侧1孔测量得到+1（左）-1（右）的结果
B’ 对应从右侧2孔测量得到+1（左）-1（右）的结果

破坏贝尔不等式例2

$$M_{A=+1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, M_{A=-1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$M_{A'=+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, M_{A'=-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$M_{B=+1}=\begin{pmatrix}\frac{2-\sqrt{2}}{4} & -1/(2\sqrt{2})\\ -1/(2\sqrt{2}) & \frac{1}{4-2\sqrt{2}}\end{pmatrix}, M_{B=-1}=\begin{pmatrix}\frac{2+\sqrt{2}}{4} & 1/(2\sqrt{2})\\ 1/(2\sqrt{2}) & \frac{1}{4+2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$M_{B'=+1}=\begin{pmatrix}\frac{2-\sqrt{2}}{4} & 1/(2\sqrt{2})\\ 1/(2\sqrt{2}) & \frac{1}{4-2\sqrt{2}}\end{pmatrix}, M_{B'=-1}=\begin{pmatrix}\frac{2+\sqrt{2}}{4} & -1/(2\sqrt{2})\\ -1/(2\sqrt{2}) & \frac{1}{4+2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

将这组投影矩阵作用到纠缠态

$$\psi=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

上，计算出各个概率

破坏贝尔不等式例2

$$p_{AB}(+1,-1)=\left|M_{A=+1}\otimes M_{B=-1}\cdot\psi\right|^2$$

$$p_{AB'}(+1,-1)=\left|M_{A=+1}\otimes M_{B'=-1}\cdot\psi\right|^2$$

$$p_{A'B'}(+1,-1)=\left|M_{A'=+1}\otimes M_{B'=-1}\cdot\psi\right|^2$$

$$p_{A'B}(+1,-1)=\left|M_{A'=+1}\otimes M_{B=-1}\cdot\psi\right|^2$$

$$p_{A'}(+1)=\left|M_{A'=+1}\otimes I\cdot\psi\right|^2$$

$$p_{B}(-1)=\left|M_{B=-1}\otimes I\cdot\psi\right|^2$$

可以验证它破坏了CHSH版本的贝尔不等式

讨论

The Violation of Bell Inequalities in the Macroworld*

Diederik Aerts, Sven Aerts, Jan Broekaert and Liane Gabora

Center Leo Apostel, Brussels Free University
Krijgskundestraat 33, 1160 Brussels, Belgium.
diraerts@vub.ac.be, saerts@vub.ac.be
jbroekae@vub.ac.be, lgabora@vub.ac.be

Abstract

We show that Bell inequalities can be violated in the macroscopic world. The macroworld violation is illustrated using an example involving connected vessels of water. We show that whether the violation of inequalities occurs in the microworld or in the macroworld, it is the identification of nonidentical events that plays a crucial role. Specifically, we prove that if nonidentical events are consistently differentiated, Bell-type Pitowsky inequalities are no longer violated, even for Bohm's example of two entangled spin 1/2 quantum particles. We show how Bell inequalities can be violated in cognition, specifically in the relationship between abstract concepts and specific instances of these concepts. This supports the hypothesis that genuine quantum structure exists in the mind. We introduce a model where the amount of nonlocality and the degree of quantum uncertainty are parameterized, and demonstrate that increasing nonlocality increases the degree of violation, while increasing quantum uncertainty decreases the degree of violation.

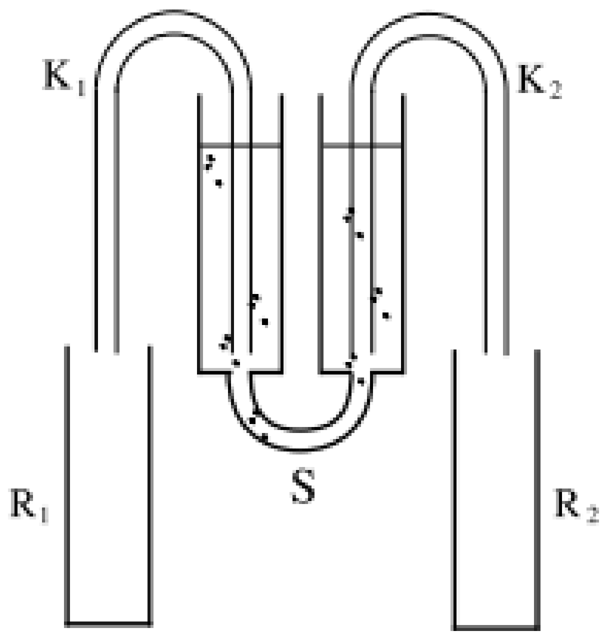
Dedication: Marisa always stimulated interdisciplinary research connected to quantum mechanics, and more specifically she is very enthusiastic to the approach that we are developing in CLEA on quantum structure in cognition. It is therefore a pleasure for us to dedicate this paper, and particularly the part on cognition, to her for her 60 th birthday.

1 Introduction

This article investigates the violation of Bell inequalities in macroscopic situations and analyses how this indicates the presence of genuine quantum structure. We explicitly challenge the common belief that quantum structure is present only in micro-physical reality (and macroscopic coherent systems), and present evidence that quantum structure can be present in the macro-physical reality. We also give an example showing the presence of quantum structure in the mind.

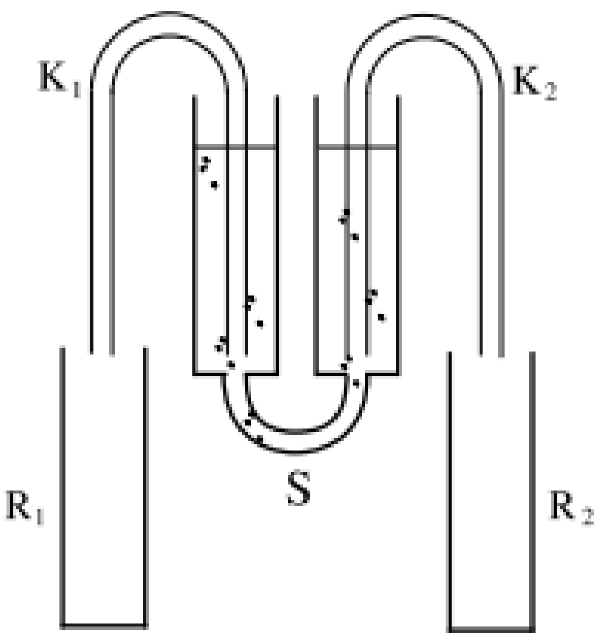
Let us begin with a brief account of the most relevant historical results. In the seventies, a sequence

一个有趣的宏观例子



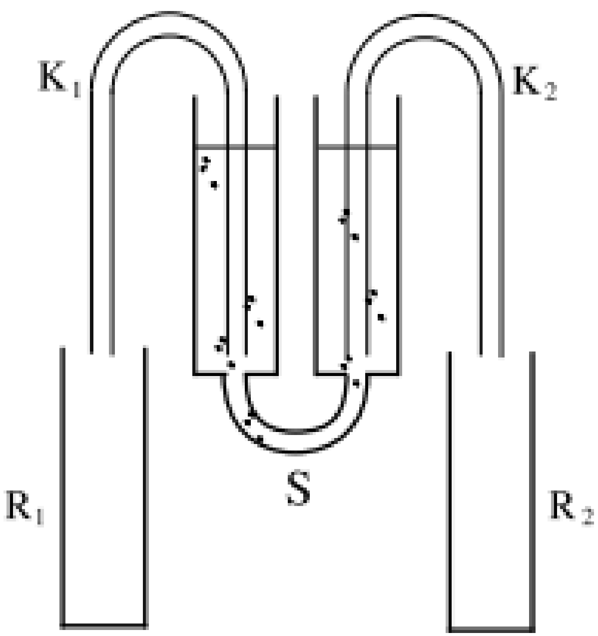
- S处有20升水
- K1,K2是两个虹吸管
- R1,R2是两个烧杯
- 要测量R1中的水是否超过10升，就用虹吸管K1
- 要测量R2中的水是否超过10升，就用虹吸管K2

一个有趣的宏观例子



- 记A={R1中水量>10}
- B={R2中水量>10}
- 则：
- P(A)=P(B)=1
- 但是，当两个虹吸管同时插入的时候，A,B不会同时满足，所以P(A&B)=0。
- 于是：P(A)+P(B)-P(A&B)=2

问题的关键在于事件的同一性



- 同时测量R1和R2本质上不是事件A&B
- 测量本身已经决定了两种测量不是同一个东西

认知系统中的例子

- A: 马是“动物”，~A： 熊是“动物”
- A’:虎是“动物”，~A’: 猫是“动物”
- B: 咆哮是“一个动作”，~B:嘶叫是“一个动作”
- B’:喷鼻息是“一个动作”，~B’:喵喵叫是“一个动作”
- A&B: 马咆哮是“动物做的一个动作”的例子，A&B’: 马喷鼻是“动物做的一个动作”的例子，……
- 破坏了贝尔不等式

$$-2 \leq E(A', B') + E(A', B) + E(A, B') - E(A, B) \leq 2.$$

完