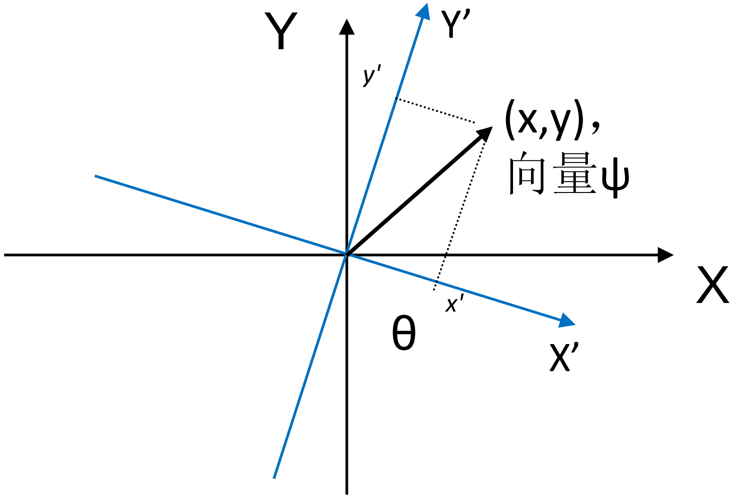
量子概率基础

Jake
集智俱乐部“量子决策理论读书会”
2012-1-8

预备数学知识

- 复数运算
  - Z=x+yi=rExp(iθ)=r(cosθ+i sinθ)
  - Z*=x-yi=rExp(-iθ)
  - $|Z|^2 = Z \cdot Z^* = r^2$
- 线性代数
  - 向量
  - 矩阵
  - 内积
  - 基向量
  - 坐标变换



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle X|X'\rangle & \langle Y|X'\rangle \\ \langle X|Y'\rangle & \langle Y|Y'\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

当概率变成复数

当概率变成复数

- 虚数i进入物理学
- 概率复数化与测量
- 概率分布的向量表示
- 让概率**转**起来！！！

概率复数化——一个游戏

- 某事件的概率p(x):一个[0,1]之间的实数
- 假如我强硬地让概率取复数：

$$\psi(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

- 并定义测量规则：

$$p(1)=|\psi(1)|^2=\psi(1)^*\psi(1)=\langle\psi(1)|\psi(1)\rangle=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

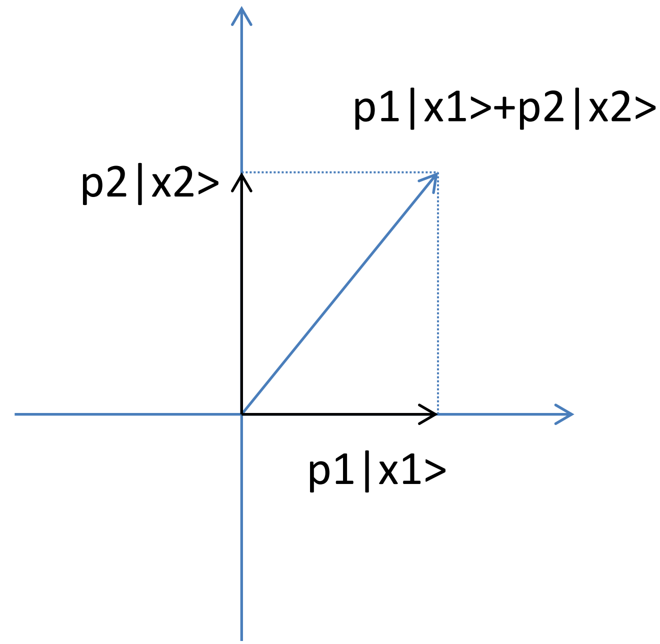
- 不会出现任何矛盾，但发现一个有趣的事实：

$$\psi(1)=\sqrt{p(1)}e^{i\theta}$$

- 都表示同样的概率，但是θ可以取任何值

概率分布与向量表示

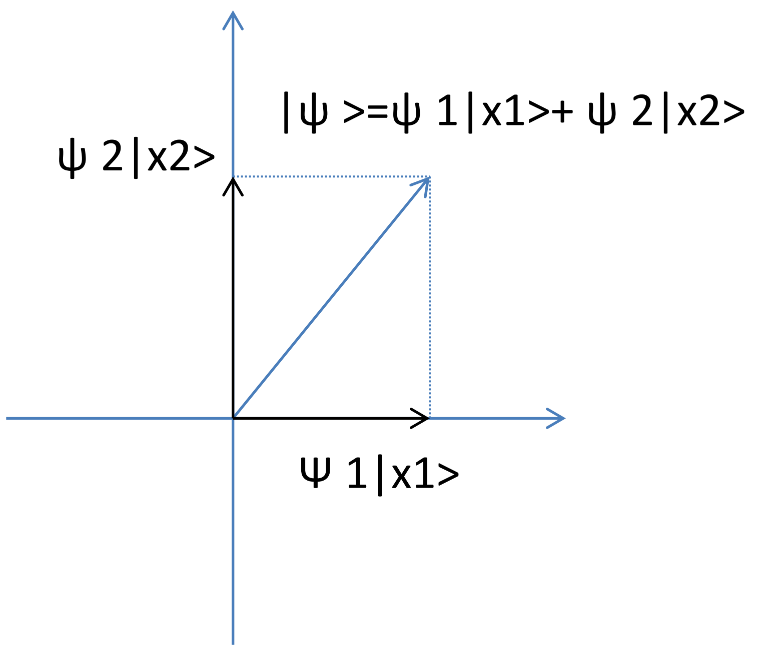
- 概率分布就是指一组归一化的实数，每个实数都是一个互斥事件的概率p(xi),∑p(xi)=1, xi,xj彼此互斥。它可以写成向量：(p(x1),p(x2),p(x3),….,p(xn))
- 也可以写成下面的形式
- p1|x1>+p2|x2>+p3|x3>+…+pn|xn>
- 其中|xi>表示空间中的一个基向量
- 注意：有n个互斥事件，对应的空间就有n维



思考：归一化条件∑p(xi)=1的几何意义是什么？

复数概率分布的向量表示

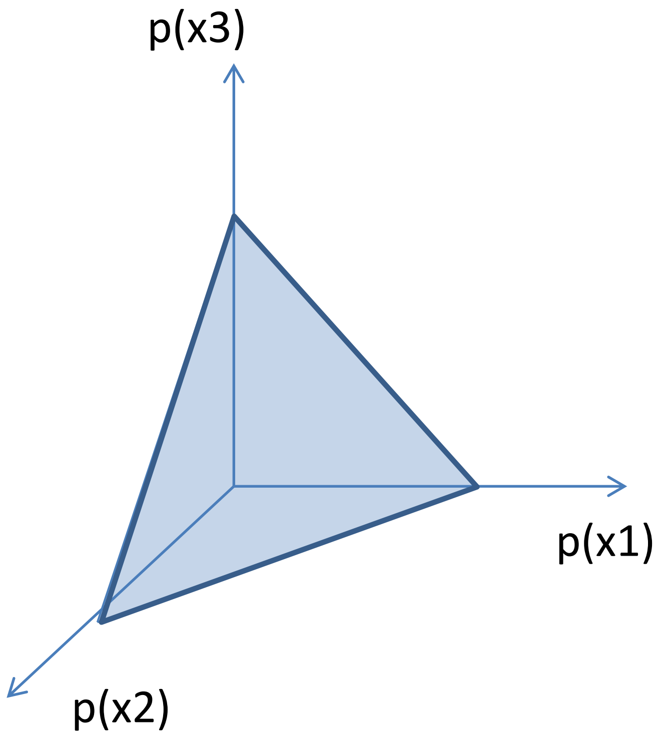
- 一组互斥事件的复数概率
- $(\psi(x1), \psi(x2), \psi(x3),...., \psi(xn))$
- 并满足归一化条件：$\sum|\psi(xi)|^2=1$
- 也可以表示成向量：
- $|\psi\rangle= \psi1|x1\rangle+\psi2|x2\rangle+...+\psi n|xn\rangle$
- $=\langle x1|\psi\rangle|x1\rangle+\langle x2|\psi\rangle|x2\rangle+...+\langle xn|\psi n\rangle|xn\rangle$

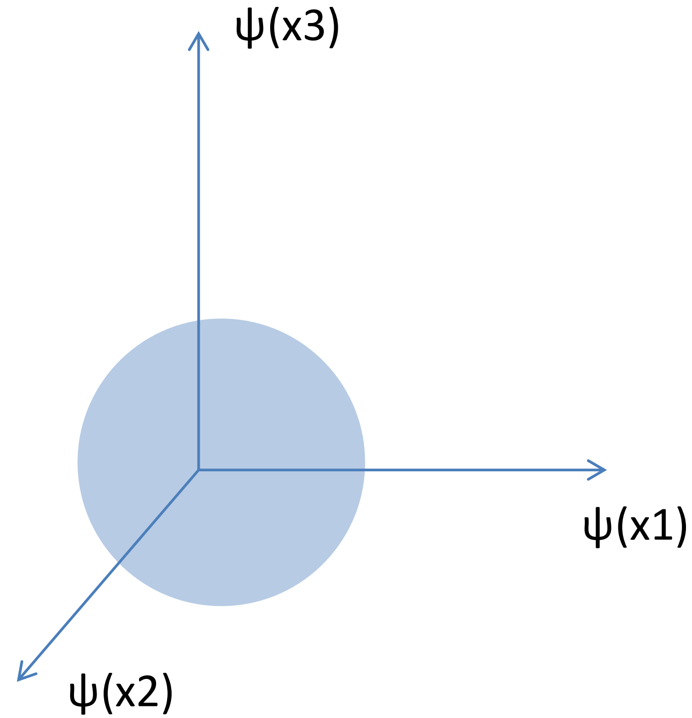


牢记：一组基向量|xi>表示一组互斥事件

思考：归一化条件$\sum|\psi|^2=1$的几何意义是什么？

几何表示

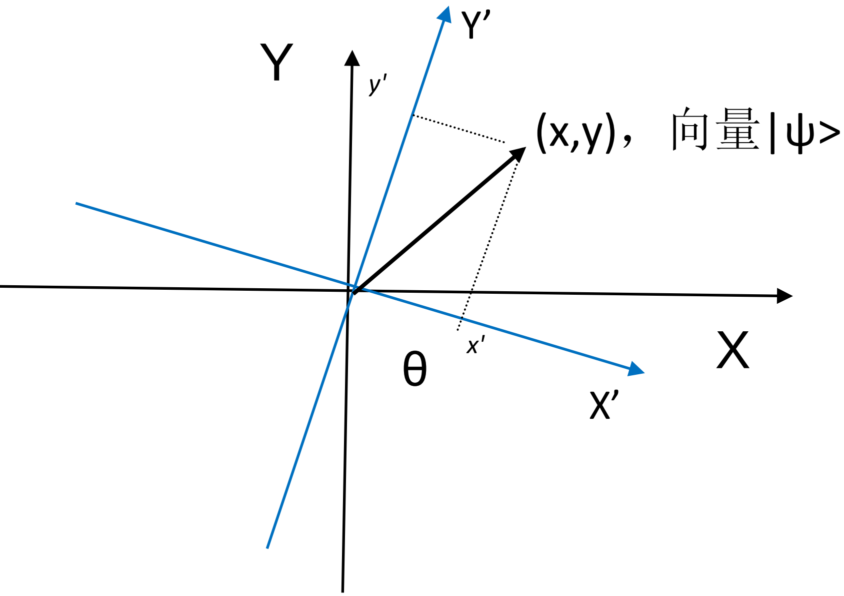




经典概率：归一化∑p(xi)=1
意味着所有的概率取值构成了单纯形

经典概率：归一化∑|ψ(xi)|²=1
意味着所有的复数概率取值构成了球面
注意，每个坐标ψ(xi)都是复数，原则上画不出来

让概率转起来



$$|\psi\rangle = x|X\rangle + y|Y\rangle = x'|X'\rangle + y|Y'\rangle$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle X|X'\rangle & \langle Y|X'\rangle \\ \langle X|Y'\rangle & \langle Y|Y'\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

在新的坐标系X’O’Y’下，向量还是那个向量，长度不变，因此新坐标系下仍然保持归一化条件，因此：

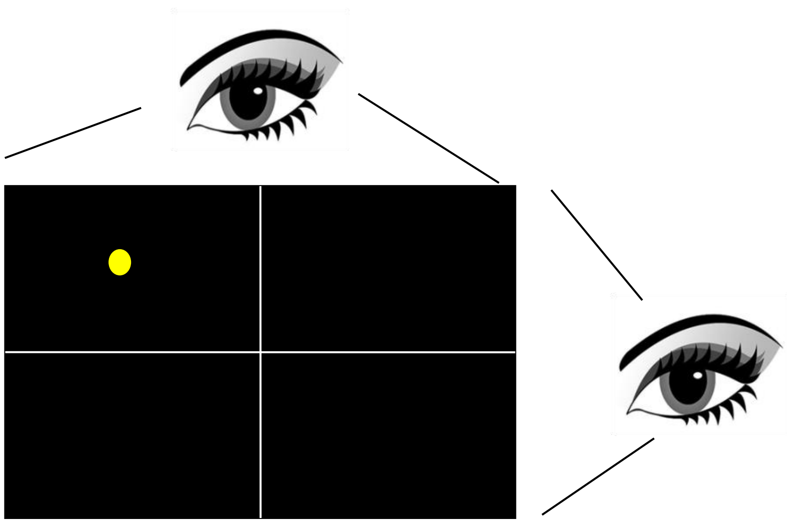
$$|x'|^2 + |y'|^2 = |x|^2 + |y|^2 = 1$$

所以，要求矩阵U满足：

$$U \cdot U^{\perp} = I$$

- 称X-Y属性和X’-Y’属性构成不兼容属性对
- 只有复数概率才能旋转

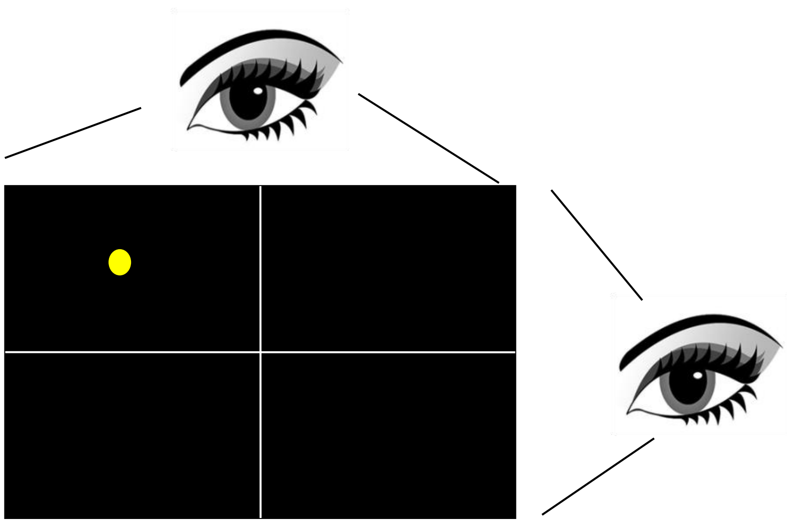
盒中的量子萤火虫



- 两套互斥事件：
- |U>, |D>
- 和|L>, |R>

- 假设上下属性和左右属性不兼容，那会出现什么情况呢？

盒中的量子萤火虫



- 假设当前的萤火虫处于状态：

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}|U\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|D\rangle$$

- 假设LD属性和UD属性的夹角是

$$\theta = \arccos(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4})$$

- 那么你在LD测量，就能得到：

$$\psi_A = \sqrt{\frac{3}{8}}|L\rangle + \sqrt{\frac{5}{8}}|R\rangle$$

- 思考：如果初始状态是

$$\psi_A = \frac{i}{2}|U\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|D\rangle$$

- 会得到LD测量的分布是什么？

不兼容属性对与不确定性原理

量子概率的本质

- 对叠加态的理解

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}|U\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|D\rangle \qquad p_A = \frac{1}{2}|U\rangle + \frac{1}{2}|D\rangle$$

- 我认为从单个变量的概率分布来看，叠加态和概率混合态没有可观测的区别
- 量子概率与经典概率的唯一区别就是不兼容属性对，即概率基向量的旋转。
- 量子运算法则定量刻画了两个概率分布之间的联系，即U,D基到L,R基的坐标变换，这是一个仅与2个属性有关系的常量矩阵

量子力学

- 在量子物理中，位置坐标x和动量p构成一对不兼容属性对。
- 粒子所在的状态空间为无限（不可数）维希尔伯特空间。任意状态（分布）可在坐标x表象下表示: $|\psi_x\rangle=(\ldots\ \psi(x-\varepsilon), \psi(x), \psi(x+\varepsilon),\ldots)=\sum\psi(x)|x\rangle$
- 同样，它在动量表象下的状态向量为（体现为动量p上的概率分布）：
- $|\phi_p\rangle=(\ldots\ \phi(p-\varepsilon), \phi(p), \phi(p+\varepsilon),\ldots)=\sum\phi(p)|p\rangle$
- 并且，量子力学说位置和动量构成不兼容属性对，也就是说向量$|\phi_p\rangle=U|\psi_x\rangle$
- 其中U是一个$\aleph_1\times\aleph_1$维的无穷矩阵

$$U=\begin{array}{cc} & y\text{列} \\ x\text{行} & \begin{pmatrix}\ddots & \vdots & \iddots \\ \cdots & e^{-ixp} & \cdots \\ \iddots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}_{\aleph_1\times\aleph_1}\end{array}$$

按照矩阵的乘法规则（把求和号换成积分号）,你能得到傅利叶变换！

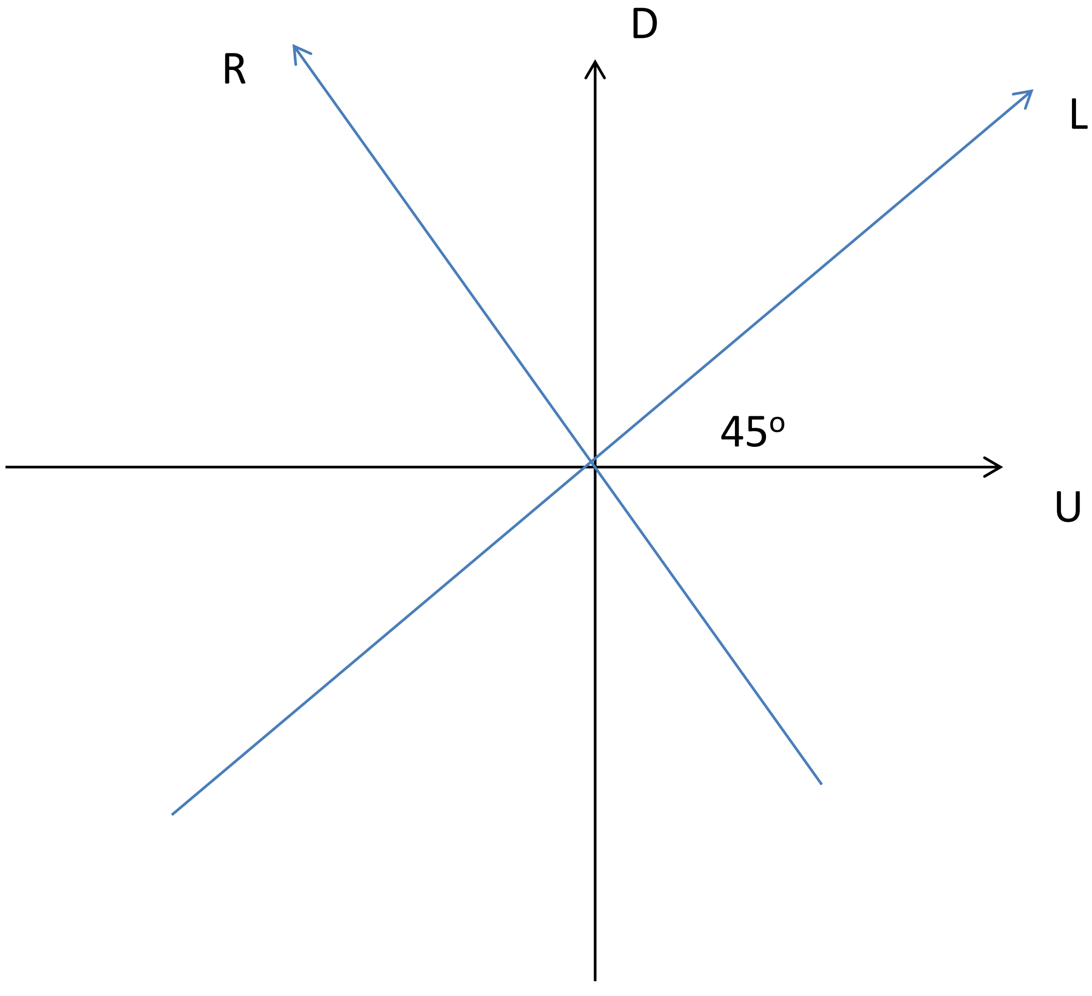
$$\phi(p)=\int\psi(x)e^{-ixp}dx$$

傅利叶变换从本质讲就是一种坐标变换！

不确定性原理

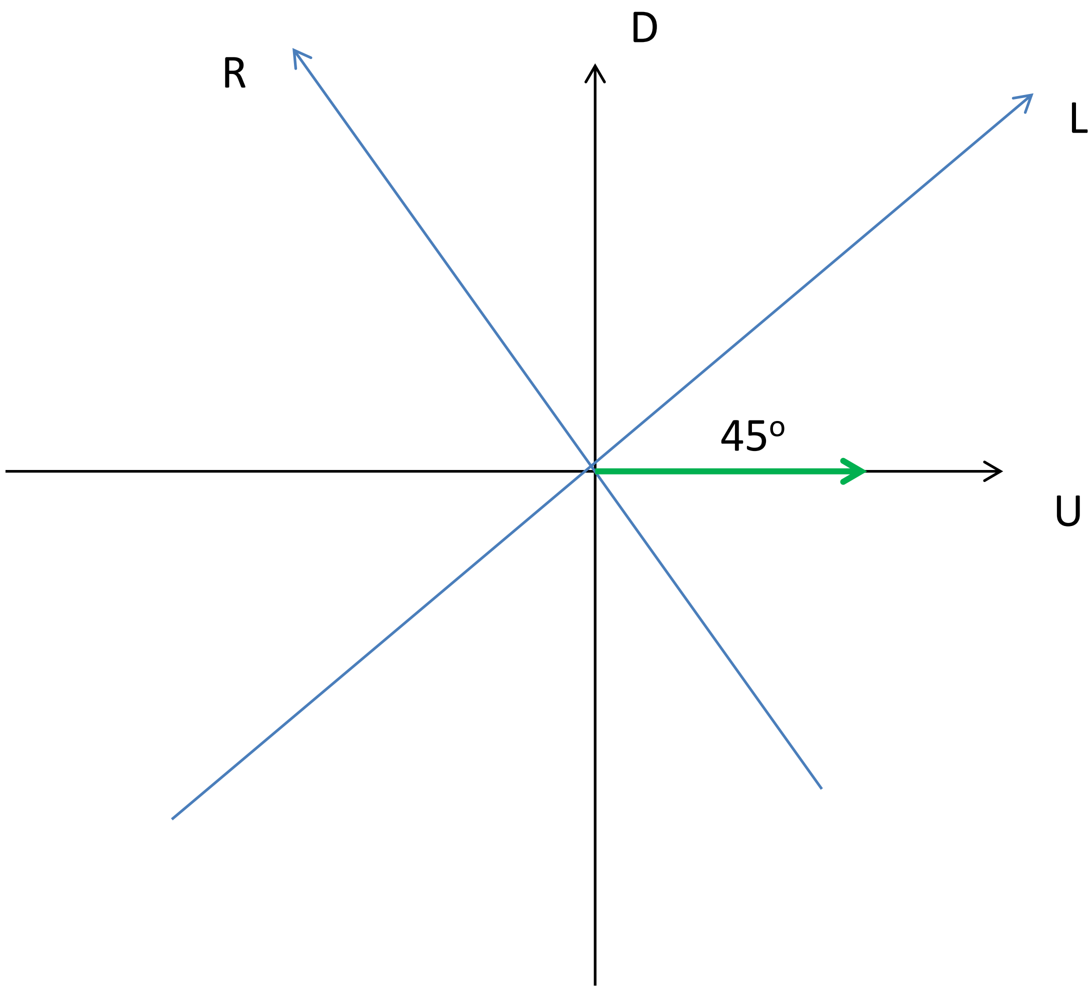
- 不确定性原理只针对不兼容属性对才成立。
- 该原理说对于一个属性的测量越精确，对于另一个属性的测量就越不精确。
- 翻译成概率语言来说就是：对于一个属性的概率分布越集中，那么它的不兼容属性上面的概率分布就会越发散，因为两者的概率分布构成了固定的坐标变换。

图解不确定性原理



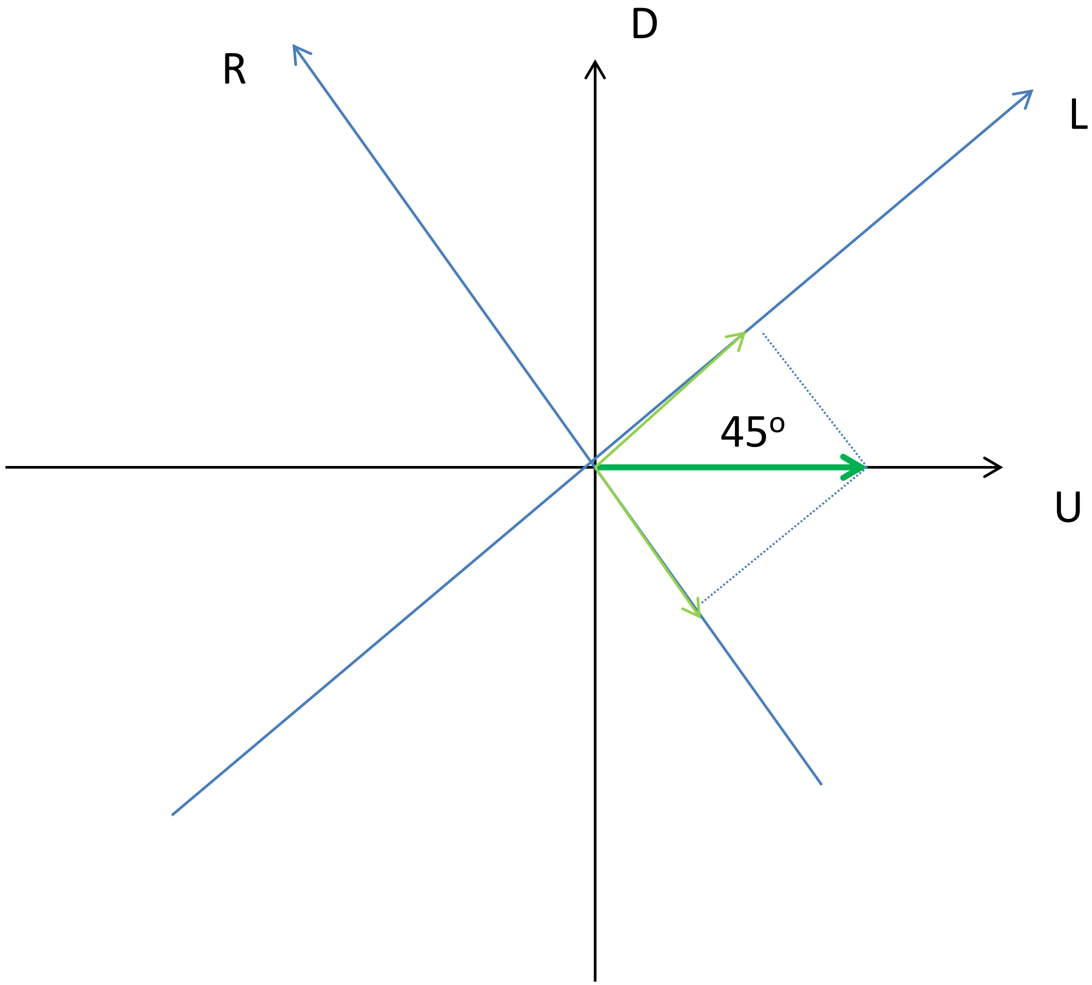
设两个属性对UD和LR构成了不兼容属性对，它们之间的夹角是45度

图解不确定性原理



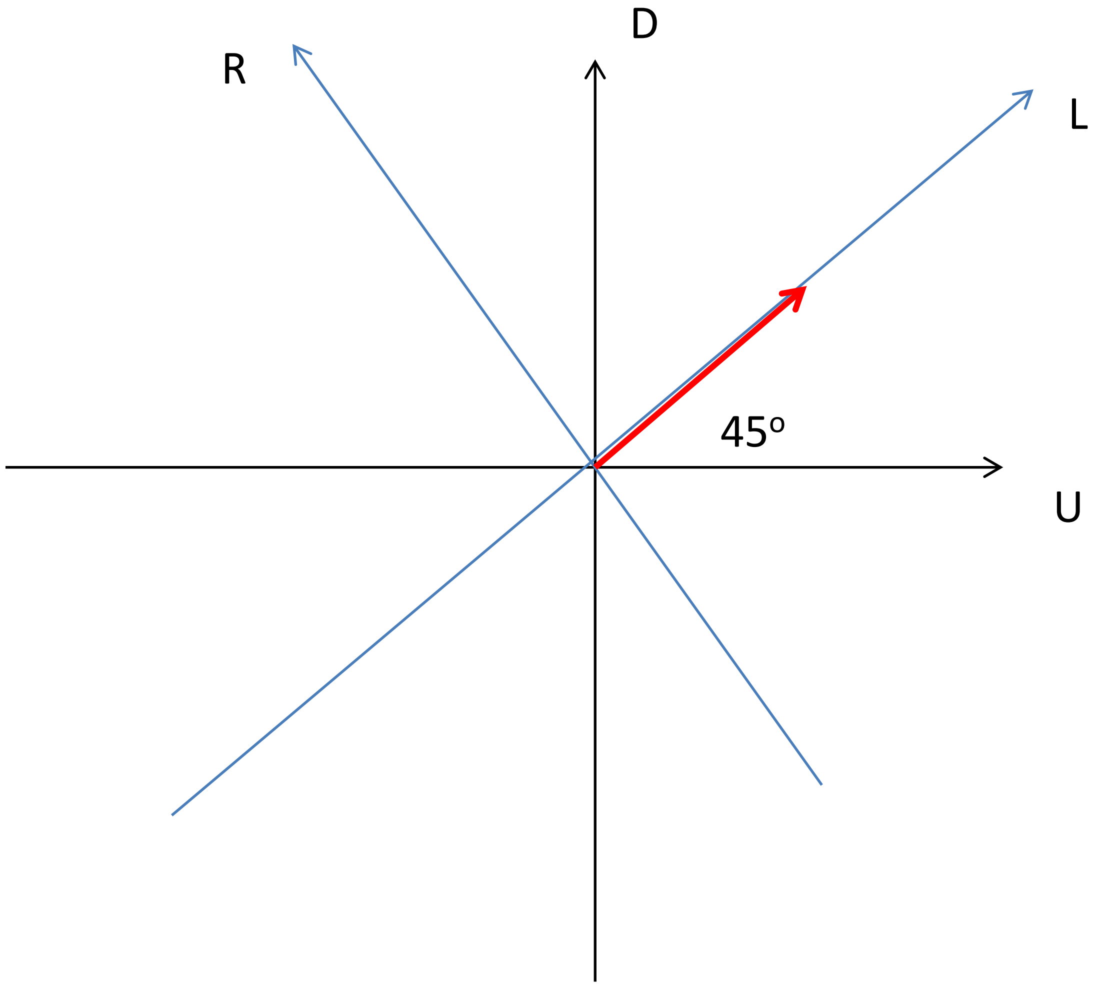
考虑一个概率分布在UD坐标下构成1|U>+0|D>

图解不确定性原理



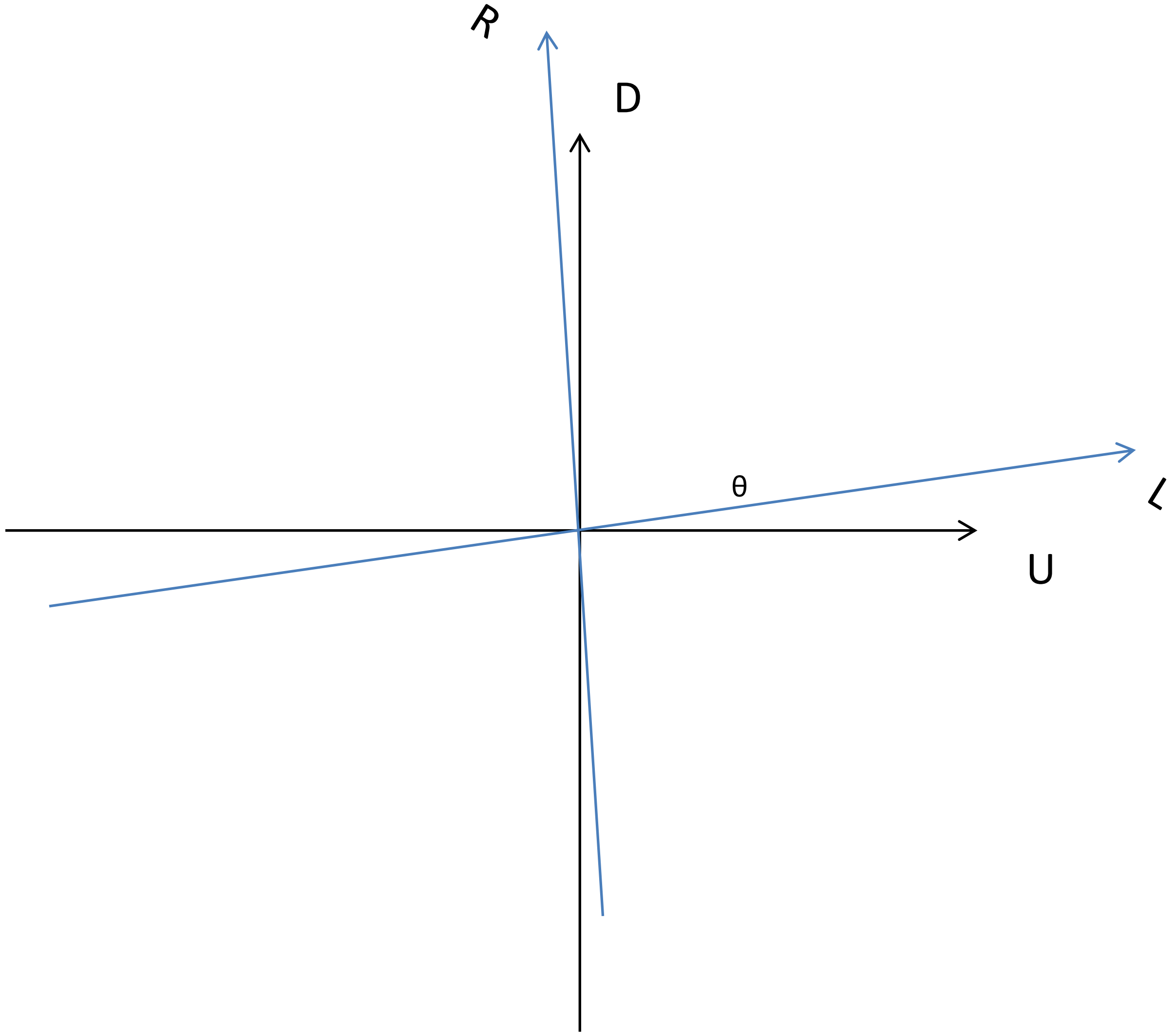
那么它在LR坐标下的投影就是 $\frac{\sqrt{2}}{2}|L\rangle+\frac{\sqrt{2}}{2}|D\rangle$,出现最不确定的概率分布(1/2,1/2)

图解不确定性原理



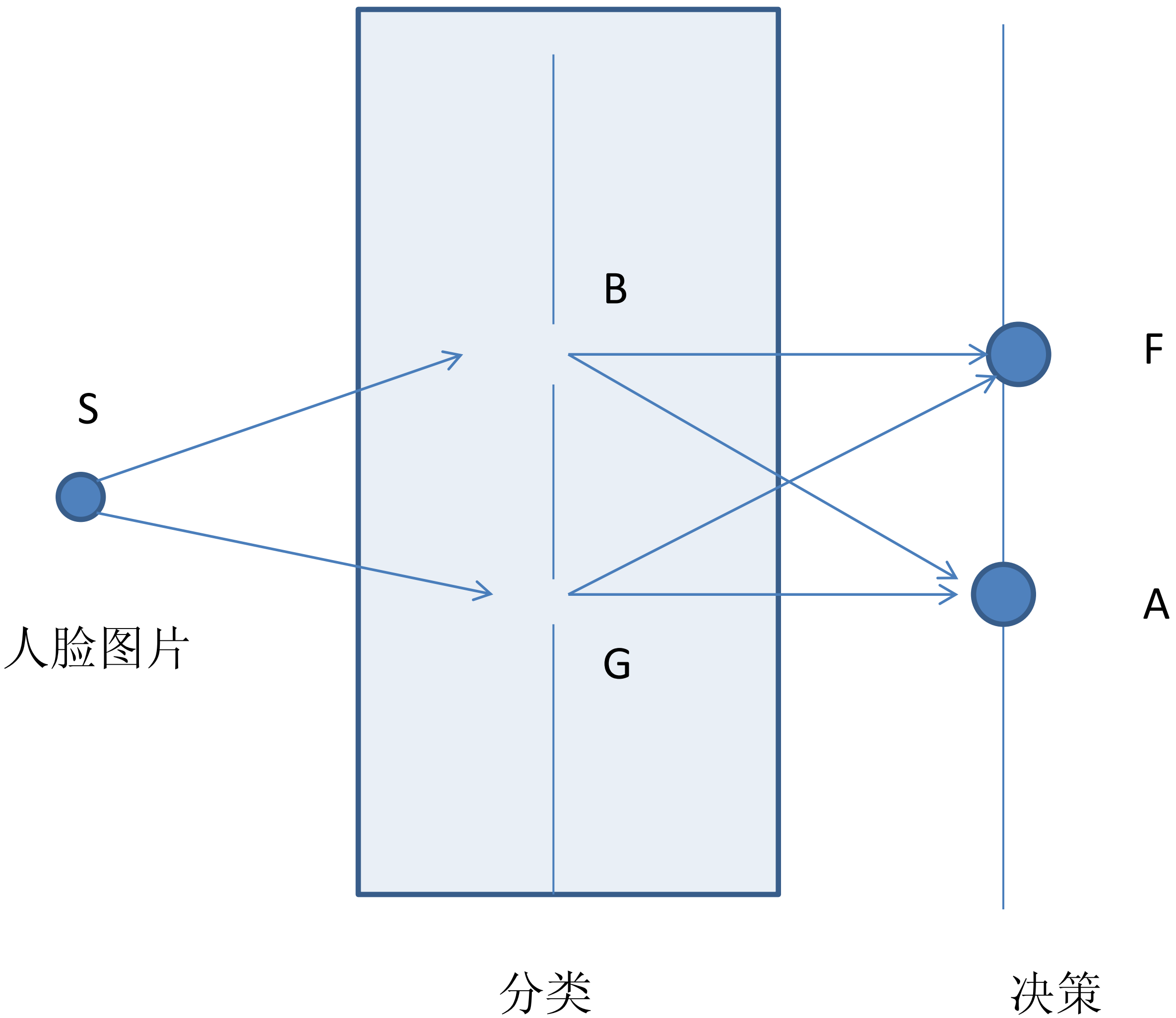
同样的道理，在UD下完全不确定的状态分布(1/sqrt(2),1/sqrt(2))在LR下则是完全确定的

不确定性与夹角有关



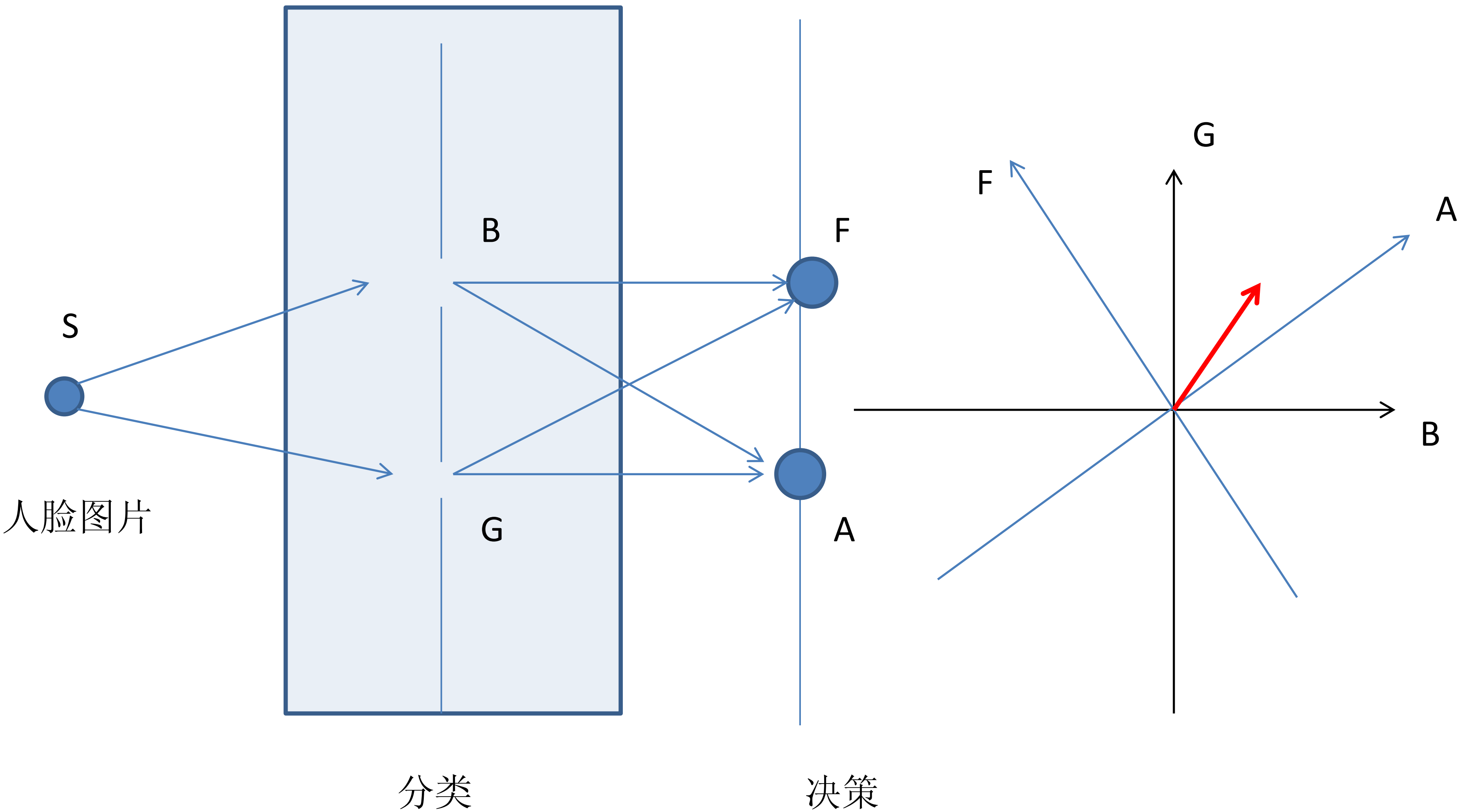
不确定度正比于两个坐标的对易子A*B-B*A

量子测量

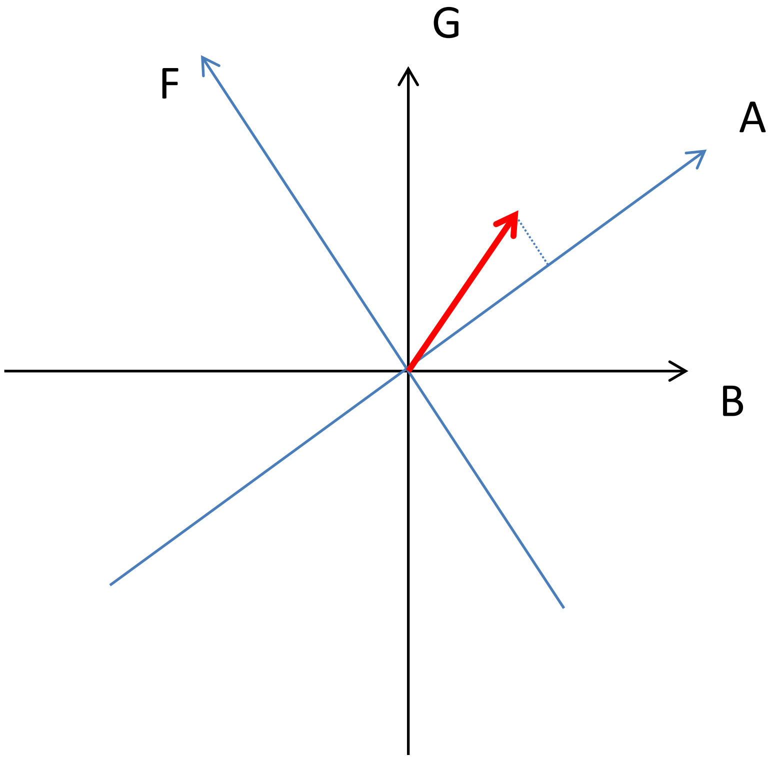


- 假设有两组基：
- (|B>,|G>)和(|F>,|A>)
- 分别对应分类和决策两个不兼容属性对

量子测量

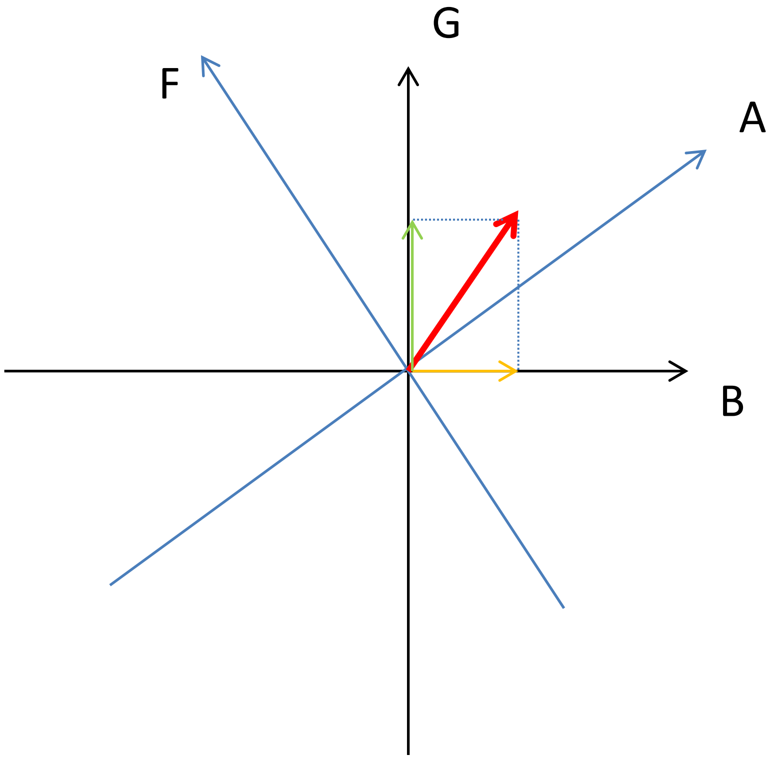


量子测量



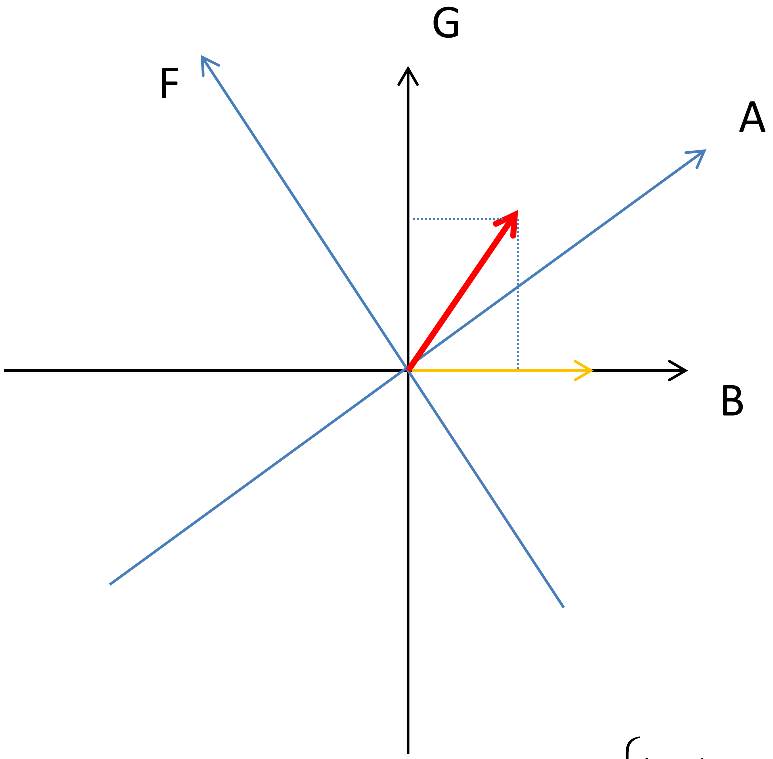
条件1：直接测量A或者F $\Pr(A) = |\langle A|\psi\rangle|^2, \Pr(F) = |\langle F|\psi\rangle|^2$

量子测量



条件2：先测量B或者G $\Pr(B)=\left(\langle B|\psi\rangle\right)^2, \Pr(G)=\left(\langle G|\psi\rangle\right)^2$

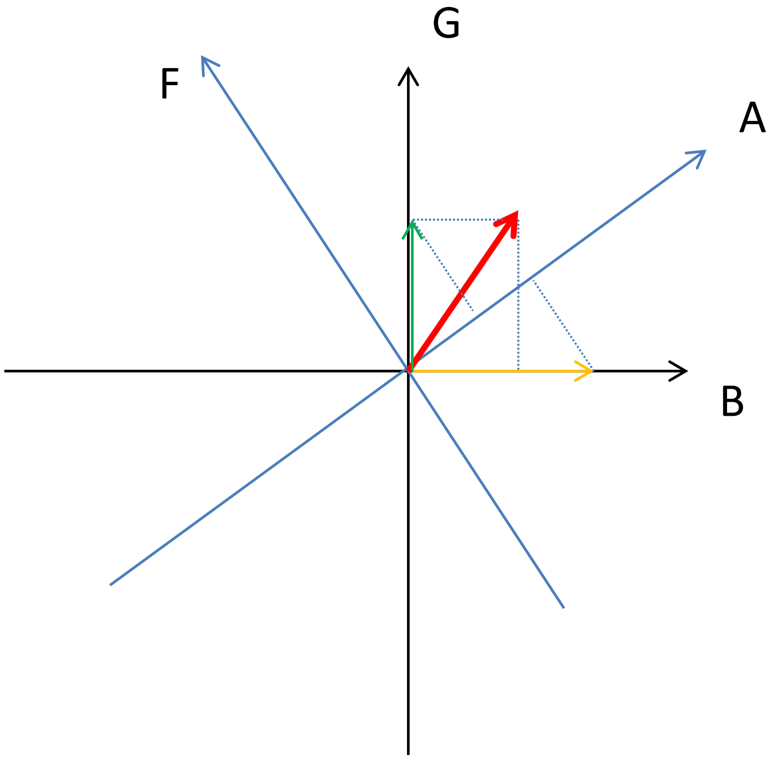
量子测量假设



$$|\psi'\rangle = \begin{cases} |B\rangle & \Pr(B) = |\langle B|\psi\rangle|^2 \\ |G\rangle & \Pr(G) = |\langle G|\psi\rangle|^2 \end{cases}$$

条件2：测量后状态向量发生变化

量子测量

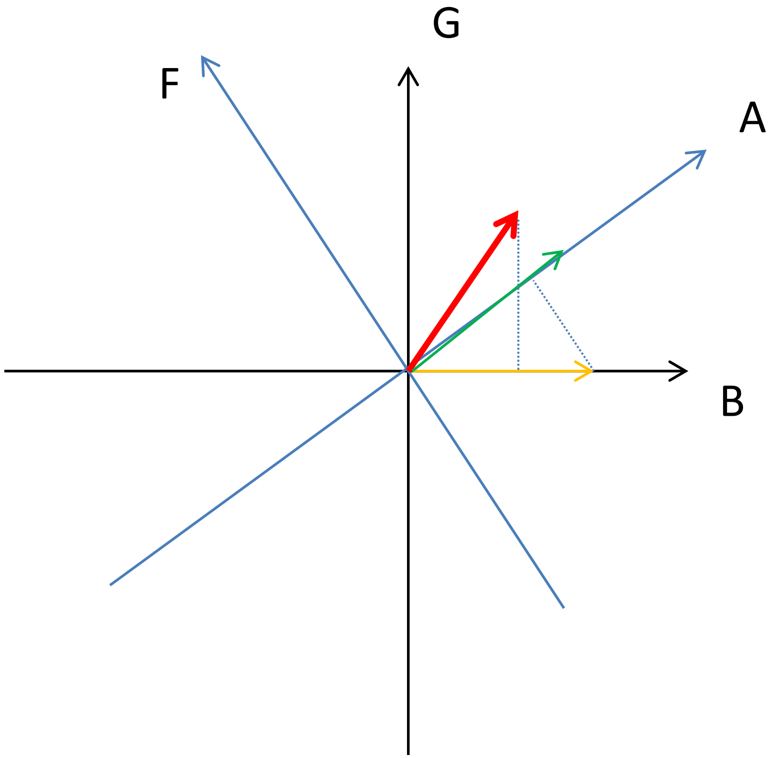


条件2：再测量A或者F

$$\Pr(A) = \left(\langle B|\psi\rangle\langle A|B\rangle\right)^2 + \left(\langle G|\psi\rangle\langle A|G\rangle\right)^2,$$

$$\Pr(F) = \left(\langle B|\psi\rangle\langle F|B\rangle\right)^2 + \left(\langle G|\psi\rangle\langle F|G\rangle\right)^2$$

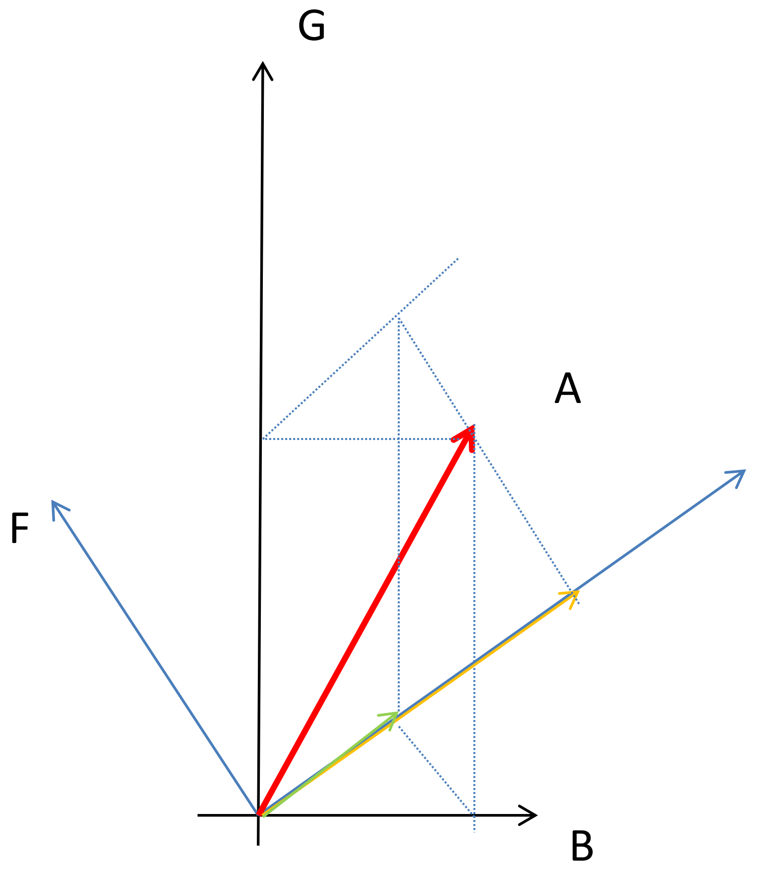
测量的不可交换性



条件2：先测B,G后再测量A,F得到的状态与先A,F后B,G不一样

$$\left|A\right\rangle \neq \left|B\right\rangle$$

对双缝干涉实验的几何解释



$$\langle A|\psi\rangle = \langle A|B\rangle\langle B|\psi\rangle + \langle A|G\rangle\langle G|\psi\rangle$$

$$\Pr(A) = \left|\langle A|B\rangle\langle B|\psi\rangle + \langle A|G\rangle\langle G|\psi\rangle\right|^2$$

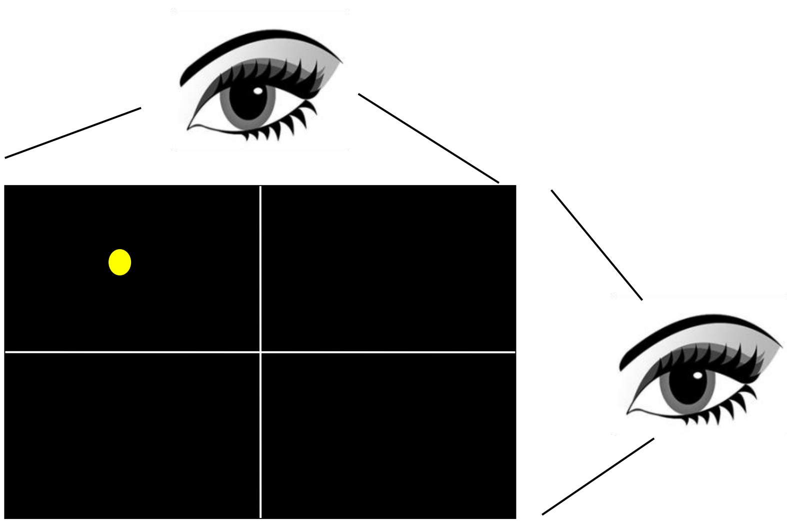
$$= \left|\langle A|B\rangle\langle B|\psi\rangle\right|^2 + \left|\langle A|G\rangle\langle G|\psi\rangle\right|^2 + Int$$

$$= \Pr(A|B)\Pr(B|S) + \Pr(A|G)\Pr(G|S) + Int$$

$$Int = 2\sqrt{r_{\langle A|B\rangle} r_{\langle B|\psi\rangle} r_{\langle A|G\rangle} r_{\langle G|\psi\rangle}} \cos\left(\theta_{\langle B|\psi\rangle} + \theta_{\langle B|\psi\rangle} - \theta_{\langle A|G\rangle} - \theta_{\langle G|\psi\rangle}\right)$$

量子能否还原成经典？

对于萤火虫的例子



- UD上的测量：

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}|U\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|D\rangle$$

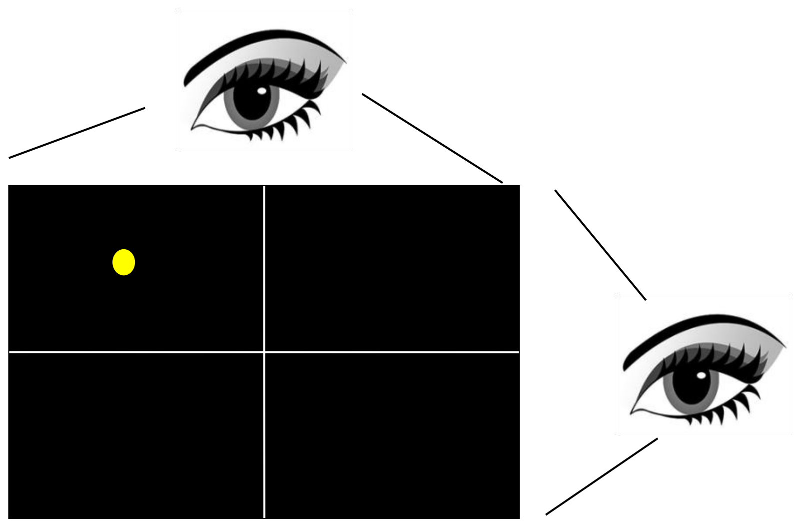
- 和L,R上的测量：

$$\psi_A = \sqrt{\frac{3}{8}}|L\rangle + \sqrt{\frac{5}{8}}|R\rangle$$

- 它完全可以用经典的联合概率密度来模拟，即：

	L	R
U	1/8	3/8
D	1/4	1/4

对于萤火虫的例子



- UD上的测量：

$$|\psi\rangle = x|U\rangle + y|D\rangle$$

- 和L,R上的测量：

$$|\psi\rangle = (x\cos\theta + y\sin\theta)|L\rangle + (-x\sin\theta + y\cos\theta)|R\rangle$$

- 它也可以用经典的联合概率密度来模拟，即：

	L	R
U	$a_{11}(x,y,\theta)$	$a_{12}(x,y,\theta)$
D	$a_{21}(x,y,\theta)$	$a_{22}(x,y,\theta)$

因此，只要找到依赖于分布(x,y)的联合概率就能模拟量子概率，但是量子概率显然更简洁， θ不随U,D上的分布而变

量子概率特殊的限制

- 注意从一组基到另一组基的变换是酉变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$UU^{\perp} = I$$

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^*+bb^* & ac^*+bd^* \\ ca^*+db^* & bb^*+dd^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow aa^* = dd^*, cc^* = bb^*$$

注意aa*就是从U到L的转移概率，bb*是从U到D的转移概率，……

因此，在2维情况下，量子概率要求转移概率矩阵对称

这在一般的心理实验中并不一定被满足

量子概率特殊的限制

- 注意从一组基到另一组基的变换是酉变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$UU^{\perp} = I$$

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^*+bb^* & ac^*+bd^* \\ ca^*+db^* & bb^*+dd^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow aa^* = dd^*, cc^* = bb^*$$

注意aa*就是从U到L的转移概率，bb*是从U到D的转移概率，……

因此，在2维情况下，量子概率要求转移概率矩阵对称

这在一般的心理实验中并不一定被满足

小结

- 量子概率从数学上比经典概率多出的东西就是旋转
- 测量就是把向量往一个坐标系下投影
- 不兼容属性对必然蕴含不确定性原理
- 量子概率与经典概率的差别：
  - 经典概率满足全概率公式
  - 量子概率要求条件概率具有对称性，但这条过于严格，通常不被满足。