

GEB 第 13、14 章总结

by 武力

由于内容太多，原定一次的读书会拆成了两次举行，第一次是在 1 月 2 日，第二次是在 1 月 22 日（周六），下面分别就这两次内容做简单总结：

1 月 2 日 第 13 章

概述：

本次活动不知是由于和尚提前出关还是本书接近高潮，人气很旺，连一向潜伏的 miner 同学也再次浮出水面，只可惜本人能力有限，没能给大家带来更完美的学习过程，只是按部就班地进行了学习和讨论。

书本知识概要：

本章前面的对话名叫《咏叹调及其种种奏鸣》，取自 1742 年巴赫的同名音乐作品，引出了“终了后的终了”的概念，同时由 1742 引出哥德巴赫性质（某偶数可表示为两个素数之和），使得乌龟同学自己也造了一个所谓“乌龟性质”（某偶数可表示为两个素数之差）。继而讨论，要想测试某个数的哥德巴赫性质可以在有限步循环内得出结论，而要想测试乌龟性质则无法事先已知需要多少步骤完成，后来乌龟又提出的妙极性质也属于后者。随后讨论了关于小说可以把真正的结尾藏在形式化的内容中的话题。

13 章正文以 Bloop 语言的介绍开始，所谓 Bloop 语言即经过有限次循环能停机的语言（与实际编程所用的语言形式无关），并称这类性质为原始递归。

书中 552 页给出了一些练习题，本来希望给大家作为现场作业做一下的，但是这些练习大部分不是太简单，就是根本做不出来（无法用 Bloop 语言解决），只有一道题的讨论有一些数学技巧，由张江解出来了（553 页第 8 行）。

继而，作者开始寻找悖论：

把所有 Bloop 程序里只存在一个输入参数的函数程序（非测试程序）删选出来称作蓝程序，按照字典排序方式排序并编号，用如下方式来表示第 k 个蓝程序所计算的函数（ N 为输入参数）：

蓝程序 $\{ \#k \} [N]$

下面构造一个所谓的“蓝对角”：“蓝对角” $[N] = 1 + \text{蓝程序} \{ \#N \} [N]$

这样如果假设“蓝对角”属于蓝程序，并排名 X 位，那么把 X 输入到两种不同的定义中可以分别得到：

“蓝对角” $[X] = \text{蓝程序} \{ \#X \} [X]$ 和 “蓝对角” $[X] = 1 + \text{蓝程序} \{ \#X \} [X]$

显然两者不一致，所以可以证明存在不属于蓝程序的函数程序。

也许这些程序属于 Floop 语言，Floop 是比 Bloop 更强的，即循环次数不受限制的语言，可以用类似的方法证明 Floop 也有漏洞，但证明方法略微麻烦一些，尤其是要假设存在一个可以判断 Floop 程序是否会停机的 Bloop 程序，在此不详述，可参看原文 565 页到 569 页。

既然 Floop 程序没有包罗万象，那一定存在更强大的所谓 Gloop 程序，但 Floop 已经是计算机语言所能实现的最高级别的范围，即 TNT 语言所能达到的极限，已经没有限制可以去掉了，那么是否 Gloop 程序只是一个神话？作者在此提出了问题，但没有详细回答。

活动总结：

本章内容比较难啃，细枝末节又比较多，我只能根据自己的判断舍弃一些内容，但是否精华就在那些被舍弃的部分，就不得而知了。比较成功的是把对角线消除法说得还算明白，后来在讨论中，我提出感觉这种方法与所探讨内容的本质似乎不完全对应，比如由 Bloop 跳到 Floop，非得用对角线法构造那么一个奇怪的“蓝对角”吗？后来构造的“红对角”到底能说明什么问题？这种“绝杀密器”真的是在提出和解决“真问题”吗？请大家思考并继续关注下章。

1月22日 第14章

概述：

上次散伙之前大家商量还是把14章放在年前解决，原定在1月23日（很有上升感的数字），后来由于我们公司23日（周日）加班，遂改到22日（周六）。张江在群里发布活动通知时还特别强调了这是哥德尔定理证明的核心一章，比较“给力”，但实际当天到场的人数没有想象的多，许多铁杆成员都没有到场，开场时略显冷清。

书本知识概要：

照例先从对话开始，对话描述了乌龟和阿基两人在艾舍尔的一副上下对称的画中历险的故事，其中提到了一个后面将用的概念，叫做“**扛（音 kuai3）摠**”，是从一名哲学家蒯恩（QUINE）的名字谐音得到的，意思是把一句话放在它的引文形式的后面组成一个新的句子，如：

- 1、“是个残句子”是个残句子。
- 2、“被**扛摠**时得到一支乌龟情歌”被**扛摠**时得到一支乌龟情歌。
- 3、“放在其引文形式后面得到假句子”放在其引文形式后面得到假句子。

第一个句子只是实现了语义通顺（相比其他更无意义的句子）。第二个句子就不一样了，它在描述它自己，可以翻译为“我（“被**扛摠**时得到一支乌龟情歌”被**扛摠**时得到一支乌龟情歌）是乌龟情歌”，与一般句子本质上的区别是：不用“我”而表达了我。第三个句子则更进一步，造出悖论来了，如果你认为它是一个真句子，则得到“我”是假句子的结论，反之，如果认为它是假句子，则说明句子的表述是正确的，即“我”是真句子，哥德尔的思想已经初见端倪。

14章正文在**扛摠**的基础上提出了“**算数扛摠**”的概念，为了构造悖论，作者使用了哥德尔配数法（详见书中341及349页），并提出了两个概念，一个是“证明对”，由一个合法证明过程的全部内容和它的最后一条公式分别对应的两个哥德尔数组成，用来说明两个数中后者所对应的公式是一条定理（因为前面的证明是合法的），一个是“自由变元用数字替换”，即将一个公式中的自由变元替换为某个数字。由后者可以得出“**算数扛摠**”的方法，即用一个公式自己对应的哥德尔数来替换公式里面的自由变元，得到一个新的公式。

于是，悖论语句开始构造：

（考虑到文字的通用性，我尝试在此处将数学语言改为日常语言）

“把一个数字X**算数扛摠**，得到的数字没有任何一个自然数可以和它组成证明对（即它对应的公式不是定理，下面不再重复说明）。”

这句话本身对应有一个哥德尔数u，然后把X用u替换（注意：这正是“**算数扛摠**”的定义），得到一个新句子：

“把 u 算数归纳，得到的数字没有任何一个自然数可以和它组成证明对。”

把这句话称为 G 。

对上面得到的句子进行简单化翻译，可以得到“ G 不是定理”。悖论的结构与前文的归纳例句 3 如出一辙！不再详述。

区别是前文的操作对象是日常语言，而这里的操作对象是 TNT 体系中的数学语言（或者说计算机程序）。

我们也可以把这个结论拆解后写出来，即：

- 0 与 u 的算数归纳化不能形成证明对；
- 1 与 u 的算数归纳化不能形成证明对；
- 2 与 u 的算数归纳化不能形成证明对；
- 3 与 u 的算数归纳化不能形成证明对；

.....

这里每一句话都对，但如果由此得出结论：“所有的自然数与 u 的算数归纳化不能形成证明对”，那就不知道对错了，因为有悖论。也就是说这个特殊的例子不能用数学归纳法，被称为“欧米伽”（希腊字母）不完全。

这样，可以有两种办法解决这个难题，一种就是接受 G ，一种是接受 G 的否命题，即“存在某个数与 u 的算数归纳化形成 TNT 证明对”，作者把这个数叫做“超自然数”，与自然数合起来称作广义自然数。

看似荒唐的处理让人想到了数学史上一些类似的情况，由此作者讨论了一些哲学问题，在此略去，感兴趣请看原文 600 页至 609 页。

活动总结：

由于一些人迟到的原因（为给大家准备爆米花，本人也迟到 20 分钟），后来人气还稍旺一些，而且结束后也未妨碍大家热烈讨论的气氛，人少可能主要是由于高校已经放假了的原因吧。

我这个以前没怎么用过功的学生居然跟大家一起把这号称史上最硬的两章啃了下来，毕竟还是本科普书吧，我在现场也曾感慨，这个比起当年啃《理论力学》时要感觉轻松多了。

和尚说这个东西虽然感觉搞明白了，但没有感觉到“爽”，我也有类似的感觉，不知道为什么。可能我们在生活中的绝大多数时候是不需要这种类型的思维的，尽管有了哥德尔定理，但数学大厦也没有因此而崩塌，人们的生活还在继续，还在继续算着一斤二两菜多少钱，从家到公司需要多长时间，以及怎么还房贷和买保险.....

在农历一年的最后一天（也就是大年三十）里，祝大家新年快乐！