

《哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成》

第 0 章的补充说明

这次讨论还是有些时间仓促，而且我觉得最关键的点没有完全突出出来。所以，还是给大家补上这个补充说明。我觉得很有必要把一些概念澄清，否则无法对后面的哥德尔定理以及整本书的思想进行透彻的理解。

1、层次

层次这个概念非常司空见惯，但是我们往往抓不住它。好在，我们总能通过一些实例来定义层次。在《GEB》这本书中，在不同的语境下，层次可以完全不同，它可以指：

a. 高度

例如，每上一层楼梯，就是升高了一层。

b. 尺度

比如你看 Google 地图，用不同的标尺来看同一块地方就得到了不同的景象。我们可以把尺度这个变量理解为一种层次，每放大一个局部，就相当于升高了一个层次。

c. 描述层次

这种层次通常发生在艺术作品、小说里面。例如：

从前有座山，山里面有座庙，庙里有个和尚讲故事，讲的什么呀？讲的是：“从前有座山，山里面有座庙，庙里有个和尚讲故事，讲的什么呀？讲的是……”

所以，每加一层引号就相当于进入了更深一个层次。从这个角度看，电影中的电影，故事中的故事，梦境里面的梦境等等都可以看作这种描述层次上面发生的事情。

d. 其他的层次

加入事物 A 生产或创造了 B，那么我们就说 A 处于第 n 层，B 处于第 n+1 层。例如，父母“生产”儿子，父母就比儿子低一个层次。

时间是一种线性流失的东西，这种线性流逝结构自然使得它就是一种天然的层次。后一时刻 t+1 比前一时刻 t 高了一个层次。

再例如，如果我们把硬件和软件的关系也理解为层次，那么神经元是硬件，突触连接方式是软件，而人类的思想则是软件中的软件。这些硬件、软件构成了层次。

再比如细胞构成人体，人构成社会……，这又会形成不同系统组成关系的层次。层次显

现实在是太多太多了！

2、同构

同构是整本《GEB》的又一个核心概念，这个也是计算机科学的核心概念。因为，计算机之所以有用，就在于计算机可以对现实世界进行编码。通过编码后，计算机内编码的世界就会与外在世界发生同构，所以，对于观察者来说，精确的同构就意味着完全等同。

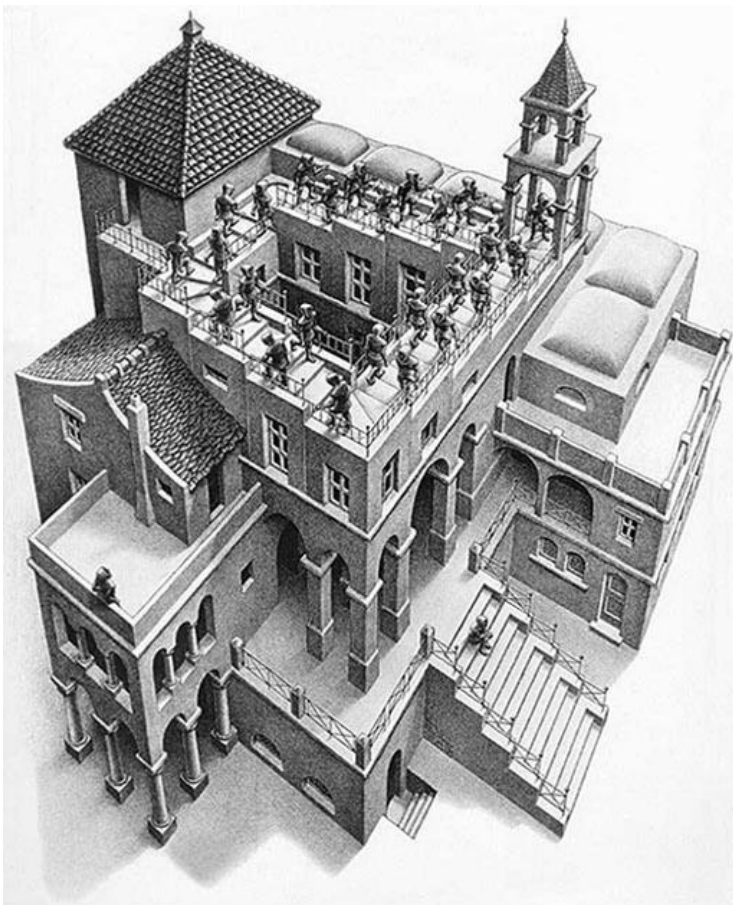
另外，不严格说，同构在《GEB》中还有着各种同义词：编码、模拟、隐喻等等。

有意思的是，同构通常隐藏得很深，以至于人们很难发现它。比如给你一串 DNA 代码，你很难发现它的意义，然而，一旦你能破译 DNA 密码和生命体之间的同构关系，你也就破译了生命的奥秘，所以，通常同构隐藏得很深。而理解同构正是对事物意义的真正理解。

3、层次混淆

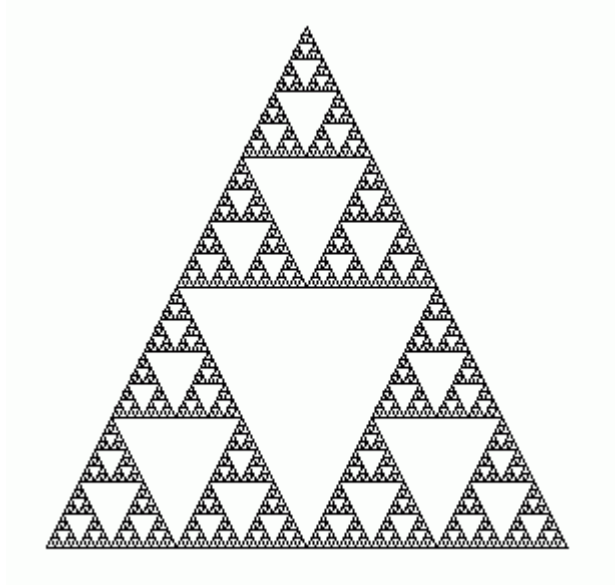
按照前面对层次的定义，通常情况下，层次应该是线性地递增的，比如，你上楼梯，总是要走完第 n 层，然后再走第 $n+1$ 层。

但是，假如第 $n+1$ 层和第 1 层发生同构的时候，就会发生层次混淆的情景，而这恰恰是《GEB》最关注的现象。例如，埃舍尔的名画“僧侣”：



艾舍尔巧妙地利用观察者的视错觉，让本应该处于第 $n+1$ 层的楼梯与第 1 层楼梯所在情景发生了同构，于是，层次开始发生混淆。这是发生在高度层次上的混淆。

那么，发生在尺度层次上的混淆是什么呢？这就是分形图！例如：



你在比例为 1:1 情况下看到的三角形（第 1 层），和在 3:1，放大局部（在第 2 层）下面看到的三角形同构。于是这 1 层和第 2 层混淆在一起。

从前有座山，山里面有座庙，庙里有个和尚讲故事，讲的什么呀？讲的是：“从前有座山，山里面有座庙，庙里有个和尚讲故事，讲的什么呀？讲的是……”

上面的句子表示的则是一种描述层次上的混淆。

大家可以进一步想一想，发生在生产层次以及时间层次上的混淆会得到什么？

4、自指

自指特指这种发生在描述层次上的混淆。例如，下面这句话：

从前有座山，山里面有座庙，庙里有个和尚讲故事，讲的什么呀？讲的是：“从前有座山，山里面有座庙，庙里有个和尚讲故事，讲的什么呀？讲的是……”

就是一种自指，因为第 $n+1$ 描述的东西与整个句子第 1 层完全同构（原则上，这句话应为无穷长）。当然，为了避免无穷长字符，我们不得不用代词“这句话”，“我”，“这个人”，“这本书”等等词汇来绕过无穷。例如：

“这句话没什么意思”

就是一个自指语句，而“这句话”这个代词实际上只是对无穷的一种压缩表示，完整的句子应该是：

““““……没什么意思”没什么意思”没什么意思”没什么意思”

由于空间有限，我们不得不运用省略号。所以，对于自指语句，通常需要我们观察者在对它进行理解的时候，将“这句话”代入为整句话的内容才可以。

当然，还有一种技巧可以在不使用“这句话”等代词的情况下，实现自指，这就是著名

的“奎恩”语句，例如：

“放在引文后面得到的句子没什么意思” 放在引文后面得到的句子没什么意思

注意，“放在引文后面”是一个祈使句，它让你这个观察者来实施这样一个操作：把引号中的句子放到引号的后面。恰巧的是，你得到的那个新句子就是这句话本身！所以，不用“这句话”、“我”等代词也可以得到自指。

因此，我们看到，这里讨论的自指仅仅是一种发生在“描述层次”上的特殊层次混淆。而自指的内在含义其实就是一种无穷。

5、悖论

我们通常所说的悖论（Paradox）其实也可以分成多种，一种是佯谬，即它通常并不是真正的矛盾，而是我们没有采用正确地理解而导致了悖论（例如相对论中的双生子佯谬）。但是，还有一种悖论，是自指悖论，因为它是真正的悖论。

当给自指语句赋予含义的时候，我们就可以创造出真正的悖论，例如：

“这句话是错的”

这种自指悖论便没有逻辑真值，因为它既不真又不假。《GEB》中的悖论自然也是讨论这种悖论的。

值得注意的是，通过自指可以构造各种类似的自我摧毁型的悖论语句，例如哥德尔句子就是一种自摧毁式的：

“这个命题在本形式系统中不可证明”

康托尔的对角线删除法以及图灵停机问题的证明也是利用了类似的自破坏式的自指，从而说明某理论的极限。但是，其实自指语句还有更多的用途。

6、生命与智能

自指语句不见得都用于制造自摧毁的炸弹，也可以用来构造奇怪的自我肯定型的怪圈，例如：

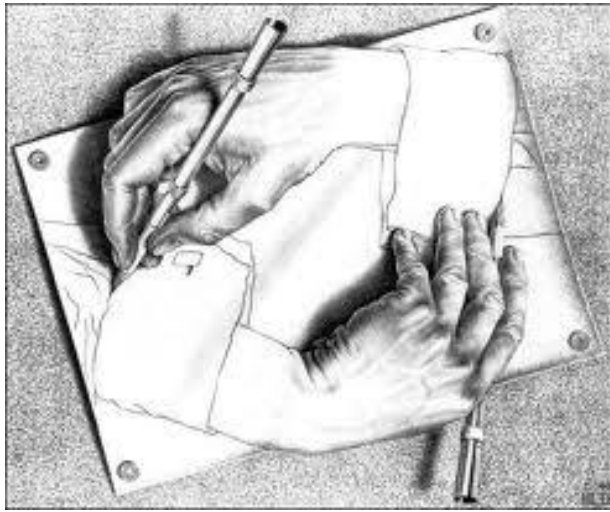
“这句话是真的”

你发现，无论在第 n 层还是第 $n+1$ 层看，它总是真的。再例如自描述语句：

“这句话有 2 个这字，2 个句字，2 个话字，2 个有字，7 个 2 字，11 个 ‘个’ 字，11 个 ‘字’ 字，2 个 7 字，3 个 11 字，2 个 3 字。”

所以它的第 $n+1$ 层描述的这句话的性质刚好是这个句子作为第 1 层所具备的性质。这便

是一种建构性的自指。Von Neumann 已经证明了，这种自我构建型的自指就是生命实现自我繁殖的最小逻辑，再例如 Maturana 等人所阐释的“自生产系统”概念就是一个可以不断进行自我修复的怪圈，在逻辑上，它等价于生产层次上的混淆，如 Escher 的画手：



所以，很有理由怀疑，智能和生命的最小逻辑都对应于这种自指语句。只可惜，现在人们对这类自指语句的了解还相当有限。

总而言之，言而总之，《GEB》并不仅仅在讨论悖论，也并不完全在讨论自指，更确切地说，这本书讨论的那条金带是指“缠结的层次”，希望大家应很好理解。