第四次活动总结

By xudong

【读书内容】

1、 Size and form in efficient transportation networks（作者 banavar）

http:// www.swarmagents.cn/thesis/detail.asp?id=206

2、 Allometric Scaling and Central Source Systems（作者 od）

http:// www.swarmagents.cn/thesis/detail.asp?id=240

【两篇文章的共同点】

1） 研究的目的：解释自然现象中的幂律关系，相关背景介绍见 jake 写的博文 http://www.swarmagents.com/complex/complexsys/flow.htm
2） 点源结构。两篇文章中都认为输运结构是点源结构，banavar 使用网络来描述这种结构，od 认为这种假设是不必要的，只要相似位置汇的强度不发生变化，就会产生幂律关系。
3） 两篇文章的切入点都是试图建立起总存、总汇和特征长度之间的关系。也就是希望得到如下关系：

$$总存\sim L^{D+1}$$
$$总汇\sim L^{D}$$

其中 D 表示空间的维度，对于三维的心血管系统 D=3，对于 2 维德河流网络 D=2。总汇$\sim L^{D}$，这个关系是平凡的，两篇文章都将主要的火力集中到总存$\sim L^{D+1}$，这个关系上来。

【总汇、总存，幂律】

当建立起总汇、总存和幂律之间关系之后就很容易说明幂律现象。

<table>
<tr><td>对于 3 维的心血管系统：
$$新陈代谢\sim总汇\sim L^{3}$$
$$身体质量\sim体内血液总量\sim总存\sim L^{3+1}$$
这样就有了
$$\log(新陈代谢)/\log(身体质量)=3/4$$</td></tr>
<tr><td>类似的，对于 2 维的河流网络有：
$$河流流域面积\sim总汇\sim L^{2}$$
$$流域总水量\sim总存\sim L^{2+1}$$
这样就有了
$$\log（河流流域面积）/\log（流域总水量）=2/3$$</td></tr>
</table>

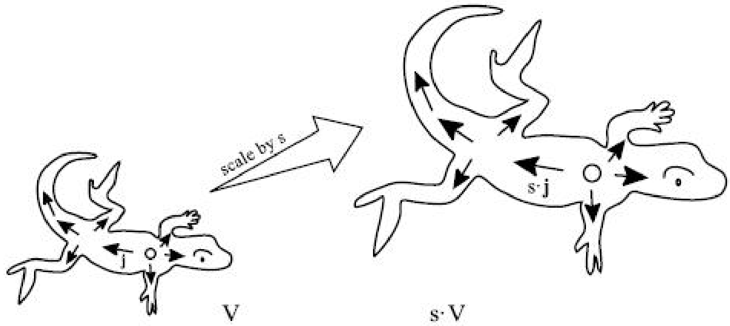
【总存$\sim L^{D+1}$】

od 观点：

od 的核心观点就是：

物体特征长度变为原来的 s 倍，如果相似位置点汇的强度保持不变，那么相似位置流的强度就变为原来的 s 倍。

下面是原文中一张图，这张图十分清晰形象的说明了核心观点



下面我们来说明由这个核心观点出发如何得到总存和特征长度之间的关系。

我们认为（这个关系并非总是成立）

$$总存\sim流对体积的积分\int j\,\mathrm{d}V$$

当特征长度变为原来的 s 倍时

$$总存\sim流对体积的积分\int sj\,\mathrm{d}s^3V = s^{3+1}\int j\,\mathrm{d}V$$

也就是说特征长度变为原来的 s 倍时，总存变为原来的s^{3+1}倍，这也就证明了总存$\sim L^{3+1}$。

为什么体积变为原来的 s 倍，相似位置的流也变成原来的 s 倍？

下面直接给出原文献中的推导，虽然过程十分简单，但是却有些抽象。我们用r表示原来的坐标，r'表示特征长度扩大 s 倍之后相似位置的坐标。那么根据前提，相似位置的汇的强度保持不变，有：

$$\sigma(r) = \sigma'(r')$$

又知道，流的散度等于汇的强度，有

$$\mathrm{div}(j(r)) = \sigma(r)$$
$$\mathrm{div}'(j'(r')) = \sigma'(r')$$

将以上两个等式的散度算符化相同有

$$\mathrm{div}(j(r)) = \sigma(r)$$
$$\mathrm{div}\left(\frac{j'(r')}{s}\right) = \sigma'(r')$$

上面两等式对应相等就有

$$j'(r') = sj(r)$$

这个等式的含义就是特征长度变为原来的 s 倍后，相似位置的流变为原来的 s 倍。

为什么相似位置汇的强度不变？

生物体细胞消耗的能量和生物体特征长度没有关系。是这个解释吗？不是很确定。

Banavar 观点：

和 od 的工作不同，Banavar 建立了网络模型。并且证明了使得网络中总存最小的网络满足如下关系：

$$总存\sim L^{D+1}$$

下面说一下如何得到这个关系，我的方法和 banavar 的方法不相同，最好能够参考原文一起阅读。

在 banavar 的文献中提到了如下公式：

$$C = \sum F_x L_x$$

其中 C 表示总的存量，F_x表示在节点 x 处汇的强度，L_x表示点源到节点 x 处的最短路径。在我看来这个公式十分重要，所以增加两点对于这个公式的说明。

1） 这个公式反映了网络结构，汇的分布和总存之间的关系，如何得到这个关系？其实想法很简单，就是将每个节点上汇引起的存加总。

2） 在得到这个公式的过程中我们只使用了点源网络的条件，对于网络结构或者汇的分布情况都没有要求。

下面我们来看看这个公式能够告诉我们什么？

假设所有汇的强度都相等，不妨假设为 1，那么有

$$C = \sum L_x$$

下面定义网络平均长度为：

$$\bar{L} = \frac{\sum L_x}{N}$$

其中 N 为网络中的节点数。由于三维网络中平均长度的最小值~特征长度，$N \sim L^3$，所以总存的的最小值~ L^4。需要注意的是在整个推导的过程中用到了所有汇均匀分布的假设。附带的我们得到一个结论：

总存~网络节点的个数*网络的平均长度

用公式表达就是:

$$C \sim N\bar{L}$$

这个公式成立的条件是汇均匀分布。

【总结】

回顾一下之前说到的一些关键点：

1） 相似位置汇的强度不变时，体积扩大 s 倍相似位置的流变为原来的 s 倍

2） 生物网络或者河流网络的平均长度正比于特征长度，这使得网络中总存最小

3） $C = \sum F_x L_x$

4） $C \sim N\bar{L}$

【进一步的工作】

1） 如何发展将复杂网络化成很多条一维网络的方法

2） 流对体积的积分和总存之间的关系。心血管系统或者河流流域都不满流速恒定，但是为什么仍然可以认为总存~流对体积的积分$\int j\, dV$