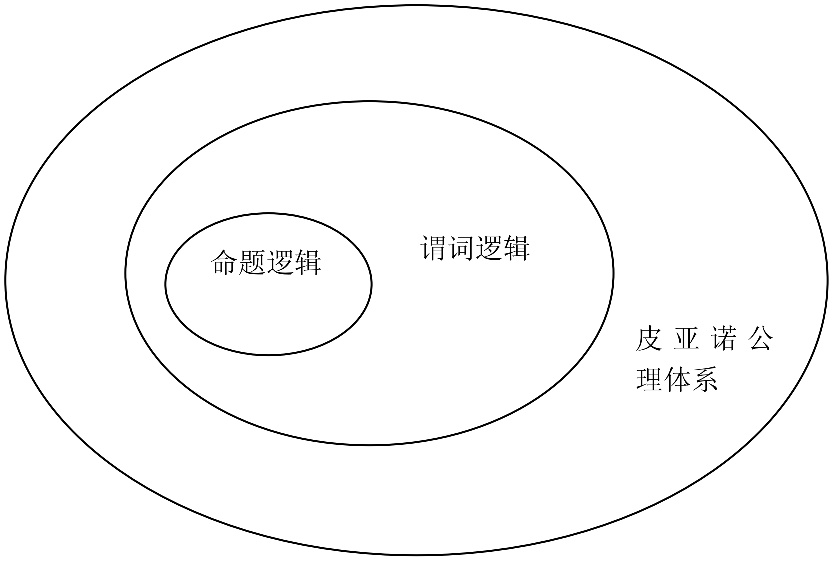
GEB 第 8、9 章 Jake 的补充

命题逻辑、谓词逻辑、匹亚诺公理体系

所谓的命题逻辑、谓词逻辑、皮亚诺公理体系之间的关系可以概括成下图：



解释一下：
1、首先，这三者都是一套公理体系，或按照 GEB 书中所说都是一套形式化的印符的逻辑系统，即系统由一大堆无意义的符号串组成，符号串按照给定的形如：
“0100111”→”110”
这样的替换规则给出。

从一个初始符号串（例如"001"）出发，不断地用字符串替换规则，就可以得到更多的符号串，所有的公理，以及运用字符串替换规则得到的字符串集合就称为该系统之中的定理。

2、谓词逻辑（在 GEB 中叫 pq 系统）中的字符串替换规则包含了所有命题逻辑中的字符串替换规则，而皮亚诺公理体系（在 GEB 中叫 TNT 系统）则包含了谓词逻辑中的替换规则和命题逻辑中的规则。

3、同时谓词逻辑包含了命题逻辑不具备的字符串和字符串替换规则，例如，两种新的符号：

存在量词：∃，和全称量词：∀

4、至此，我们都不必考虑字符串所表示的意义，仅仅把它看作一个机械的字符串替换系统即可。

意义与解释

1、命题逻辑

但是，之所以形式系统有意思，不仅仅在于它的无意义性，更在于对形式系统的解释，即把符号赋予意义。
1、在命题逻辑中，任何的项 p,q,s,t 之类都表示一个命题，也就是一个判断句，诸如：

p：我明天会死
q：你不是猪

我们知道，所有的命题都有 T,F 两种值，我们可以把任何的命题逻辑中的句子赋予这两个值，这就是对形式系统的解释。

进一步，我们可以给命题逻辑系统（pq 系统）中的公理赋值 T，则，我们发现，按照命题逻辑系统的形式操作，我们能够得到的定理（即系统中推导出来的字符串）都对应了符合我们对逻辑的常识的真句子。所以，命题逻辑表达了逻辑的真理。

2、谓词逻辑

然而，命题逻辑还不够强大，因为它不能建模如下的逻辑推理过程：

大前提：所有人都会死
小前提：Jake 是人
结论：Jake 会死

由于在命题逻辑中，我们没有诸如“所有人”这样的全称概念，所以我们并不能建模上述的推理过程。因此，我们要采用谓词逻辑来干这件事儿。

我们知道，其实任何一个命题判断都可以看作如下的结构：

主语+谓词

当然，这比我们熟悉的“主+谓+宾”要简单了一些，我们将谓+宾合并成了一个称之为谓词的东西，并用 P(x)表示，其中 P 表示那个谓词，即函数，而 x 是一个变量，它可以表示某个具体的主语。

这样，例如，我们可以定义 P(x)表示 X 不是猪，那么 P(你)就表示了“你不是猪”这个逻辑判断。

有了这种谓词结构，我们就可以定义两种量词，

$$\exists x \in X : P(x)$$
$$\forall x \in X : P(x)$$

其中 X 表示所有人的集合，这样第一句话就表示：“存在着某个人 x，他不是猪”，第二句话表示“所有的人都不是猪”。

当然，有了这套语法，还可以制定出一些字符串替换规则，例如我们可以把一个包含全称量词的句子中的那个变量 x 替换成任意一个常量，并把全称符号去掉。例如我们把 $\forall x \in X : P(x)$ 这个句子中的 x 替换成 jake，就得到了 P(jake)这个命题，表示“Jake 不是猪”这样一个定理。

有了谓词的上述替换字符串法则，我们就能描述这小节一开始论述的三段论推理了。

3、匹亚诺公理体系

当把上述谓词逻辑用到自然数域 N，也就是将所有变量的定义域 X 限定为 N 的时候，并添加一些有关自然数的几个公理之后，这个新的谓词逻辑体系就称之为算数公理体系，或者我也把它叫做匹亚诺公理体系。

当我们把形式系统这套方法（即印符的方法）推广到自然数域的时候，遇到的第一个问题就是我们究竟怎么表示无穷多个自然数。告诉大家一个绝招：我们利用递归来超越无限。这是一套 GEB 中相当普遍的用法。为了能够描述所有的自然数，我们仅需定义两种新的符号：0，和 S。

0 很显然，就是那个 0 了，而如果把 S 加到 x 的前面，就表示求 x 这个自然数的后继写为 Sx，也就是 x+1。这样，S0 就表示 1，SS0 表示 2，……

因此，我们可以用印符的方法，并注意利用递归的技巧定义出自然数 N 集合来。

1、0 是 N 中的一个元素；

2、如果 x 是 N 中的一个元素，那么 Sx 也是 N 中的元素

这样，我们就得到了对所有自然数的定义了。问题的关键就是 2 这一步，它其实是一个递归定义，导致了无穷。

当然，这个匹亚诺公理体系还包括一些新的公理，都是关于自然数性质的，它们包括：

公理 1：$\forall a: \sim Sa=0$

公理 2：$\forall a:(a+0)=a$

公理 3：$\forall a:\forall b:(a+Sb)=S(a+b)$

公理 4：$\forall a:(a\cdot 0)=0$

公理 5：$\forall a:\forall b:(a\cdot Sb)=((a\cdot b)+a)$

另外，还有一个最最重要的公理，叙述如下：

归纳规则：设 u 是一个变元，X{u}是一个 u 在其中自由出现的良构公式。如果 $\forall u:\langle X\{u\}\rightarrow X\{Su/u\}\rangle$ 以及 X{0/u}二者都是定理，那么 $\forall u:X\{u\}$ 也是一个定理。

解释一下，其实这个最后一个公理（字符串替换规则）就是我们熟知的数学归纳法。简单说，他就表示：

如果 X(0)为真，并且对于任意的自然数 n：X(n)为真→X(n+1)为真，那么我们就认为对于所有的 n，X(n)为真。

这一点非常之关键，因为它是整个归纳法的核心，也是导致后面的构造歌德尔式的自毁灭语句的关键要素之所在。我们看到其实上面对自然数的定义也是用到了递归的思想。

然而，究竟这一条公理 5 究竟怎么和自指以及歌德尔定理联系起来的，大概要等到下一次读书会，即第十三章才会提到。

有关歌德尔配数以及如何让 TNT 谈论它自身

以上概括的基本是第 8 章的所有东西，到了第 9 章，老侯上来先摆出一大堆禅宗公案来，不知道是为了何故。大概是老侯当年写书的时候悟到了歌德尔定理最微妙的地方的时候意境忘乎所以，心飘飘然，处于 sendlee 所谓的高峰体验时期，于是即兴写下了有关禅宗公案这些它自己也不见得理解的东西。说实话，与其看老侯对禅宗的解释，还不如让东方和尚给你念念经呢。

然而，估计老侯写着写着，心血来潮的那股劲儿过去了，就在第 339 页的地方，突然笔锋一转，开始谈论起了形式系统来了，真让人感觉思维都刹不住车了。

那么，在第 9 章中，老侯主要讲了什么呢？继续我们刚才的讨论，其实有了匹亚诺公理体系，我们便可构造一种同构，使得 TNT 这个系统可以谈论它自身了。

那么，这个同构就被称为歌德尔配数，也就是将 TNT 之中的字符串一一映射到自然数域 N 之中。

具体的，由于 TNT 中的字符集是有穷的，比如它是 A，那么我们就可以用一个 log|A|为自然数对 A 中的每个字符进行编号，这样，任意一个 TNT 中的句子，就能够用一个很长的数字来编码了，而这个编码最终会是一个很大的自然数。

其次，TNT 中的印符推理规则都可以用自然数上面的函数 f(n)来实现。其中 f 的作用就是把上一条语句的编码 n 影射成下一条语句的编码 f(n)。

那么，这样 TNT 系统就可以谈论它自身了。有关技术细节，请大家参考 GEB 中的 349 页到 352 这部分。我就不多说了。

至此，要证明歌德尔定理所需的技术条件基本已经具备了，就差一个小技术：就是那个“算术汇恩”，这是一个特别可爱的小玩意儿。就是这个东西：

“算术汇恩特别好玩” 算术汇恩特别好玩