读书会总结

一、数学、元数学、形式化

1、列举了几个"数学"与"元数学"的例子:

数学:2+3=5
元数学:"2+3=5"是一个算术表达式

数学:x=x　0=0　0!=0
元数学:算式"0=0"由算式"x=x"把"x"替换为"0"得到。
元数学:算式 0!=0 不是算术中的定理。

2、"数学"与"元数学"的区别:

"数学":对数学某分支中的对象、结构以及它们的特性的陈述。
"元数学":对"对数学某分支中的对象、结构以及它们的特性的陈述"的陈述。

3、形式化:

形式化是把一个具体的理论、实际的场景抽象为一个没有意义的符号、符号串、符号串的变换规则、初始符号串组成的整体，这四个部分组成的一个整体以及这个整体中的初始符号在变换规则下的变换、变换出的新符号串，一一对应了具体理论、实际场景的演化和演化中的状态。

形式化的结果，是一个四元组(原子符号集，符号串集，符号串间的变换规则集，初始符号集)

4、"形式化后的数学"、"元数学"与"象棋"、"元象棋理论"的类比:

可以把某个具体数学分支形式化，这个形式化出来的四元组，就刻划了那个具体数学分支的特性，

"这个四元组(形式化的结果)是否能够完全的、一致的刻划那个具体数学分支的特性"、"这个四元组(形式化的结果)中的初始符号是否有冗余、是否够多"，等等上述的这两个陈述，以及对这两个陈述的判定，属于元数学。

象棋游戏中的棋子对应原子符号，棋盘上棋子的布局状态对应符号串，象棋开局时的棋盘上棋子的布局对应初始符号，象棋的游戏规则对应符号串间的变换规则。另外，胜负说的是，双方轮流使用变换规则对棋盘布局进行变换，如果某一方先达到某一个事先约定好的棋盘布局，那么这一方就胜，另一方就为负。这是"形式化后的某个数学理论"与象棋的类比，象棋游戏本身对应数学。有下面一

类陈述，比如"在游戏的规则下，象棋游戏的双方永远分不出胜负"，"在游戏的规则下，象棋游戏的某一方总有必胜的策略"等，属于"元象棋"，对应"元数学"。

二、命题逻辑以及它的形式化

1、命题逻辑:

其本质是对人类思考问题、判断决策、生活交流等活动中所遵从的普遍规则的抽象，这个普遍的规则，就称之为命题逻辑。这个普遍规则用直观图表表示出来，就是所谓的“真值表”，与算术中的十进制“九九乘法表”有本质相似性。另外这个图表，还可以再抽象，把它看作一个状态集合到这个状态集合自身的对应，这个状态集合中只有二个元素，用符号 T 和 F 表示；这种集合之间的对应关系称之为函数，函数有一元，有二元的，也有多元的，把其中某个特定的一元对应，称做"非"，把其中某个特定的二元对应称做"与"，另一个称为"或"，还有一个称为"蕴含"，还有"等价"等等。由排列组合可知，一元对应中共有 4 个函数，二元对应中有 16 个函数，"非"是 4 个一元函数中的 1 个，"与"、"或"、"蕴含"、"等价"是 16 个二元函数中的 4 个，而命题逻辑中，根据人类心智的实际运作经验，只取了这几个函数关系，其它的还有一元的 3 个和 2 元的 12 个，命题逻辑中没有采用，但是其它体系却有可能采用，如"异或"在二进制进位加法中就被使用。从函数(集合对应关系)的角度来描述命题逻辑，虽然没有实质性的作用，无非是用另一种方式把事情重新描述了一下，但是它(用集合对应关系的观点)能够认清所谓“命题逻辑”的本性，从而能够从集合元素组合、排列的特性方面来对一个逻辑公式作出它是否是逻辑恒等式的判断，从而更好的洞察出变换逻辑公式时所使用的变换技巧，从而从元数学的角度来在规则之外，把握这些规则所能产生结果的特性。

2、命题逻辑的形式化:

罗素、怀特海的<<数学原理>>中使用了四个公理。形式化后形成的四元组，不是唯一的，可以有多种形式化的结果。

3、形式化的命题逻辑是一致的并且是完全的。

一致性:形式化的命题逻辑不可能既可以推导出 S 又可以推导出(~S)，完全性:依据真值表规则所产生的逻辑恒等式都可以由形式化的命题逻辑推导出来。这个完全性的证明，可能是 Godel 给出的。

三、谓词逻辑以及它的形式化

1、谓词逻辑:

包括命题逻辑，同时，加入了全称量词"任意一个"，限定量词"某一个"。

2、谓词逻辑的形式化:

形式化所得到的四元组，称之为 K 系统，K 取自 Kurt Godel(库尔特·哥德尔)中的"K"，K 系统又叫一阶逻辑系统。K 系统的公理，是在命题逻辑的形式化的结果之上，加上另外两条公理。

3、形式化的谓词逻辑是一致的，并且是完全的。

这个结果是由哥德尔证明的。这个结果又叫一阶形式的完全性。

四、算术以及它的形式化

1、算术基础:

皮亚诺在 1889 年提出的用自然语言描述的关于自然数的 5 条公理，一个相等公理；二个与加法有关的公理；二个与乘法有关的公理。

2、算术的形式化:

它的公理包括谓词逻辑形式化中的所有公理加上"四、1"中所述的算术特有公理。算术的形式化又叫一阶算术。

3、一阶算术是不完全的:

即在一阶算术是一致的情况下，存在某个 S, S 和~S 都推导不出来；另一种说法是，存在一个算术命题是真的(即上句中的某个"S")，但是在一阶算术中不可判定(因为 S 和 S~都推导不出来)。这个结果称为一阶算术的不完全性定理，是哥德尔证明的。另外，他还证明了，如果一阶算术是一致的，那么这个一致性的证明不能在一阶算术中形式化。

4、证明过程中采用的主要方法有:

a、把一阶算术中的所有符号、符号串、初始符号、变换规则以及推导过程的序列等都与算术中的自然数建立一一对应关系，这样关于一阶算术中的命题的陈述就变为了对于自然数结构特性的陈述，这个具体的一一对应关系叫 Godel 配数，Godel 配数依据了算术基本定理(即每一个自然数的质因子分解是唯一的)。

b、然后把对自然数结构特性的陈述再转换为对一阶算术中命题的陈述，这个转换能否进行，涉及到可表达性和递归函数、递归关系概念，这两个概念是由 Godel 在证明这个定理时，开始研究的，后来有继续的发展，成为可计算理论的一个重要组成部分。

c、使用了 Cantor 证明"自然数集中的元素与自然数的幂集中的元素不能建立一一对应关系"时所采用的对角线法。 [注:Cantor 的证明的这个结果，也称做实数集是不可数的。又称做实数集与自然数集不能建立一一对应关系。]