GEB四五章讨论提纲

原则

1. 避免简单地重复书中已有的内容，试图针对第四、五章出现的核心概念补充相关材料，以加深理解
2. 核心概念围绕以下几个关键词：无限、递归、形式系统
3. 对比核心概念在艺术和科学领域的不同理解，以引发趣味和思考

关键词1：无限

1. 文学领域关于无限概念的遐想
   - 博尔赫斯的短篇小说《沙之书》：当你拥有一本无限页数的怪书时，你会有何感受？
   - 人面对无限时的不安情绪，“翻过的页码，永远也不会再次出现”，“真的是无限？还仅仅是我们没看到它的尽头？”，“一本无限页数的书，如果燃烧起来，会不会冒出无穷多的烟？”
   - 人们本能地惧怕面对无限，惧怕来自无限的不确定和无力感
2. 科学领域对于无限概念的探索：借助数学对无法言说的无限说些什么
   - 康托的集合论以及无限的细致结构：借助一一映射的工具讨论集合的基数
   - 对于无限集合，不存在整体大于部分的关系（自然数、整数、奇数、偶数都拥有相同的基数）
   - 实数的基数大于自然数，对角线法的证明，可数无穷，不可数无穷，代数数和超越数
   - 更大基数的集合
     - 二维平面和一维线段拥有相同的基数（无法通过增加维度得到“更大”的无穷）
     - 集合的集合（幂集）拥有更大的基数，可通过幂集构造更大的“无穷”
     - 不可数无穷同样拥有无限的等级

关键词2：递归

1. 文学领域的递归结构
   - “世界历史是我们被迫阅读和不断撰写的文章，在那篇文章中我们自己也在被人描写着”——卡莱尔
   - 博尔赫斯的短篇小说《圆形废墟》
     - 你在睡梦中用思想创造出一个“孩子”，你的“孩子”离你而去。你开始担心，担心你的“孩子”有一天发现自己不是真实的。你在担心中意外地发现，其实，你自己也不是真实的，你也是别人在睡梦中用思想创造出的“孩子”。
     - 小说用卡罗尔（《爱丽丝梦游仙境》的作者）小说中的一句话开头：“如果他不再梦见你了...”
2. 科学领域对递归的研究

- 递归和对自然数的认识密不可分：皮亚诺用递归建立了自然数的公理体系，或者说，皮亚诺公理体系是递归的基础。
- 递归论是系统地研究递归的科学分支，其核心是围绕函数与谓词，讨论计算和判定的可行性：
  - 函数 f(x)：将数映射成数
  - 谓词 A(x)：将数映射成真假
  - f(x)可计算：如果f(x)有定义，有限步可以得出其值；如果f(x)无定义，有限步可知。如满足，则称可完全计算，如不满足第二点，则称半可计算。
  - A(x)可判定：如果A(x)为真，有限步可判知；如果A(x)为假或无定义，有限步可判定。 如满足，则称可完全判定，如不满足第二点，则称半可判定。
- 一般递归函数的可计算性和图灵机可计算等价
- 存在特殊的函数和谓词，无法在有限步内判定其无定义或不真（半可计算/半可判定），这正是GEB一书关注的焦点

关键词3：形式系统

1. 形式系统建立在集合论的基础之上，对于一个集合有三种方法确定其成员
   - 枚举：如果集合成员有限，总能通过枚举定义集合。如果集合的成员为无穷，则需要以下变通的方法
   - 递归枚举：给定基本成员对象（公理）和产生式规则，通过递归产生更多的成员对象（定理），可用于无限成员的集合定义
   - 判定规则：通过判定规则检验任意给定的对象是否是集合的成员，公理一定存在判定规则，而对于无限的集合，对于递归枚举生成的定理，是否存在简单的判定规则？
2. 同构
   - 同构是在两个系统之间的特殊映射，确保某种“运算”在两个系统之间得以保持
   - 从同构角度理解的阴阳五行，古代文化中素数的重要地位
3. 同构和意义的产生
   - 讨论形式系统和某个我们更熟悉的“世界”中的同构映射，该映射保持判定运算，也就是说，形式系统中的真定理被映射成为“世界”中的真陈述。于是，通过该映射我们赋予形式系统以某种“意义”，上述过程可看作对形式系统的解释。
   - 意义和形式系统以及对形式系统的解释相关
4. 一致性和完全性
   - 外部一致性：形式系统和某个一致的外部世界中存在同构映射，即形式系统的真定理被映射成为外部世界的真陈述
   - 内部一致性：形式系统内部相容。何为“相容”？内部一致性是否可转化成为外部一致性？内部一致性或许是说，存在某种潜在的一致的“世界”，可以与待研究的形式系统之间建立起同构的关系。
   - 完全性：外部世界的真陈述在形式系统内都存在真定理与之对应。
   - 完全性和一致性之间可能存在矛盾，为使得形式系统达成一致，我们构造的解释有可能导致相当多的真陈述在形式系统内部没有对应的定理存在。当我们对完全性有所要求时，一致性可能无法满足。

5. 关于形式系统的一致性和完全性的故事
   - 希尔伯特和解释法：如何证明公理系统的相容性？希尔伯特引入解释法。将一个公理系统的无矛盾通过同构映射（解释）转化为另一个公理系统的无矛盾，以此简化问题。通过解释法，可以将非欧几何的无矛盾转化为欧式几何的无矛盾，进而转化成为实数系统的无矛盾，转化成为自然数系统（皮亚诺公理体系）的无矛盾。此时，问题无法被进一步化简，通过外部一致性探讨形式系统一致性的道路走到了极致。如何论证算术公理的无矛盾性（内部一致性），这被列为希尔伯特第二问题。
   - 希尔伯特相信，算术系统的一致性是可被证明的。他在1930年的演讲中宣言“我们必须知道，我们必将知道。”这句话，刻在他的墓碑上。
   - 希尔伯特说出此话之时，哥德尔已经完成了不完全定理的证明，任何一个包含了自然数公理系统的形式系统，都无法在一致的同时做到完全。只是此时，这一证明还未被希尔伯特所知。

参考文献

1. 《博尔赫斯短篇小说集》，王央乐译，上海译文出版社，1983
2. 《数学悖论与三次数学危机》，韩雪涛，湖南科学技术出版社，2006
3. 《递归论》，莫绍揆，科学出版社，1987